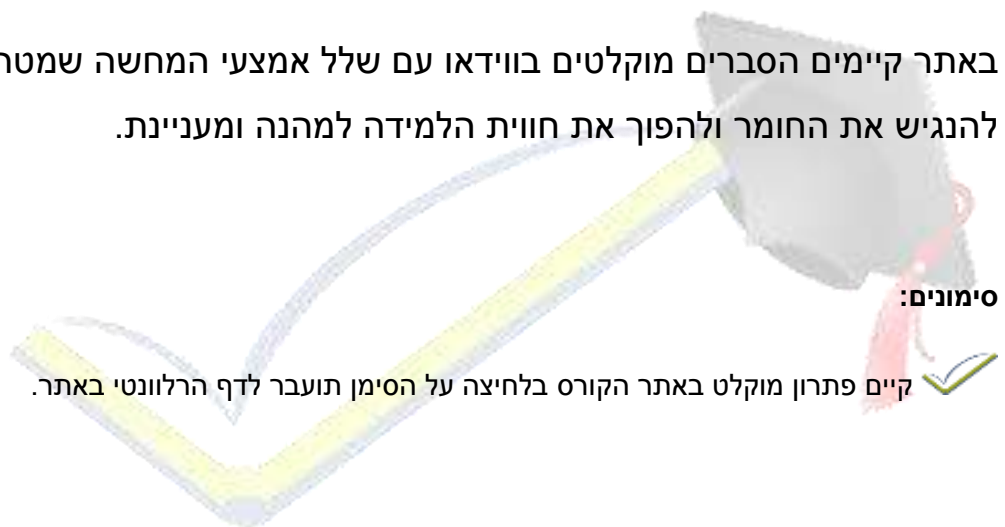


## תלמידים יקרים

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **אינטגרל**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומרי עזר להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.



**סימונים:**

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל [info@OpenBook.co.il](mailto:info@OpenBook.co.il)

**openbook**  
המרכז לקידום אקדמי

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

**המרכז לקידום אקדמי OpenBook.**

## ✓ חשבון אינטגרלי

### ✓ הפונקציה הקדומה

עד כה למדנו לחשב את הנגזרת של פונקציה וקראנו לפעולה זו גזירה.

כעת נעסוק בפעולה ההפוכה, כלומר מציאת הפונקציה המקורית עפ"י הפונקציה הנגזרת שלה.

נעסוק כעת בפעולת האינטגרציה – חישוב אינטגרל

אינטגרציה היא פעולה שהפוכה לגזירה עד כדי תוספת קבוע.

כלומר, תהיה נתונה הפונקציה הנגזרת  $f'(x)$  וצריך יהיה למצוא את הפונקציה המקורית  $f(x)$ .

כעת נעסוק בפעולת אינטגרציה בעיקר בהסתמך על ידיעת הנגזרת. אינטגרלים כאלה יקראו אינטגרלים מידיים.

הסבר: מהי פונקציה קדומה?

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = x^2 - 4$$

$$f_3(x) = x^2 + 1$$

$$f_4(x) = x^2 - 1,000,000$$

נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

שלוש הפונקציות הן מהצורה:  $f(x) = x^2 + C$

השוני היחיד הוא באיבר החופשי  $C$

הנגזרת של כל אחת מהפונקציות היא:  $f'(x) = 2x$

## ✓ הגדרה: פונקציה קדומה

פונקציה  $F(x)$  נקראת פונקציה קדומה לפונקציה נתונה  $f(x)$  אם  $F'(x)=f(x)$  לכל  $x$  בתחום של  $f(x)$ .

שימו לב – פועלת האינטגרציה לא תיתן לנו פונקציה יחידה.

למשל הפונקציה:  $f'(x) = x^2$  היא יכולה להיות כל אחת מהפונקציות  $f(x)$  הבאות:

$$f(x) = \frac{x^3}{3}, \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + 8, \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - 9, \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$$

למעשה  $f(x)$  היא כל פונקציה מהצורה  $f(x) = \frac{x^3}{3} + c$  כאשר  $c$  הוא מספר קבוע.

מקור השם פונקציה קדומה הוא בכך שהפונקציה  $f(x)$  מתקבלת מ-  $F(x)$  על ידי גזירה, ובמובן זה  $F(x)$  קודמת ל-  $f(x)$ .

הגדרה:

פונקציה  $F(x)$  נקראת פונקציה קדומה לפונקציה נתונה  $f(x)$  אם  $F'(x)=f(x)$  לכל  $x$  בתחום של  $f(x)$ .

מקור השם פונקציה קדומה הוא בכך שהפונקציה  $f(x)$  מתקבלת מ-  $F(x)$  על ידי גזירה, ובמובן זה  $F(x)$  קודמת ל-  $f(x)$ .

## ✓ תרגילים

נתונה נגזרת של הפונקציה. יש למצוא את משפחת הפונקציות הקדומות שהנגזרת היא:

$$f'(x) = 3x^2 \quad \checkmark \quad (1)$$

$$f'(x) = x^3 \quad \checkmark \quad (2)$$

$$f'(x) = x^5 \quad \checkmark \quad (3)$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 - x^5 \quad \checkmark \quad (4)$$

$$y' = x - 5x^4 \quad \checkmark \quad (5)$$

$$y' = 2x - 1 \quad \checkmark \quad (6)$$

## מונחים וצורת רישום

✓ התהליך באמצעותו מוצאים פונקציות קדומות נקרא אינטגרציה.

✓ אוסף כל הפונקציות הקדומות של  $f(x)$  נקרא אינטגרל בלתי מסוים של  $f(x)$  ומסומן  $\int f(x) dx$ .

✓ נהוג לסמן פונקציה קדומה לפונקציה  $f(x)$  ב-  $F(x)$ .

✓ הסימן  $\int$  (סימן האינטגרל) הוא אות S מסוגנת, האות הראשונה במילה Sum – סכום.

✓ הפונקציה  $f(x)$  הרשומה באינטגרל  $\int f(x) dx$  נקראת אינטגרנד.

✓ אם  $F(x)$  היא פונקציה קדומה של  $f(x)$ , אז הביטוי  $f(x)dx$  הוא הדיפרנציאל של  $F(x)$ .

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \quad \checkmark$$

✓ מהרישום  $dx$  בסימן האינטגרל ניתן ללמוד שהמשתנה של הפונקציה הוא  $x$ .

## חוקי אינטגרציה בסיסיים הנובעים מחוקי הגזירה

$$\text{מתוך: } (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\text{מקבלים: } \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

האינטגרל של סכום (או הפרש) שתי פונקציות (שיש להן פונקציה קדומה) שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים של שתי הפונקציות.

$$\text{מתוך: } (af(x))' = af'(x)$$

$$\text{מקבלים: } \int (af(x)) dx = a \int f(x) dx$$

האינטגרל של פונקציה (שיש לה פונקציה קדומה) המוכלת במספר קבוע שווה למספר הקבוע כפול האינטגרל של הפונקציה.

$$\text{מתוך: } (F(ax + b))' = aF'(ax + b)$$

$$\text{מקבלים: } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \text{כאשר } \int f(x) dx = F(x) + C$$

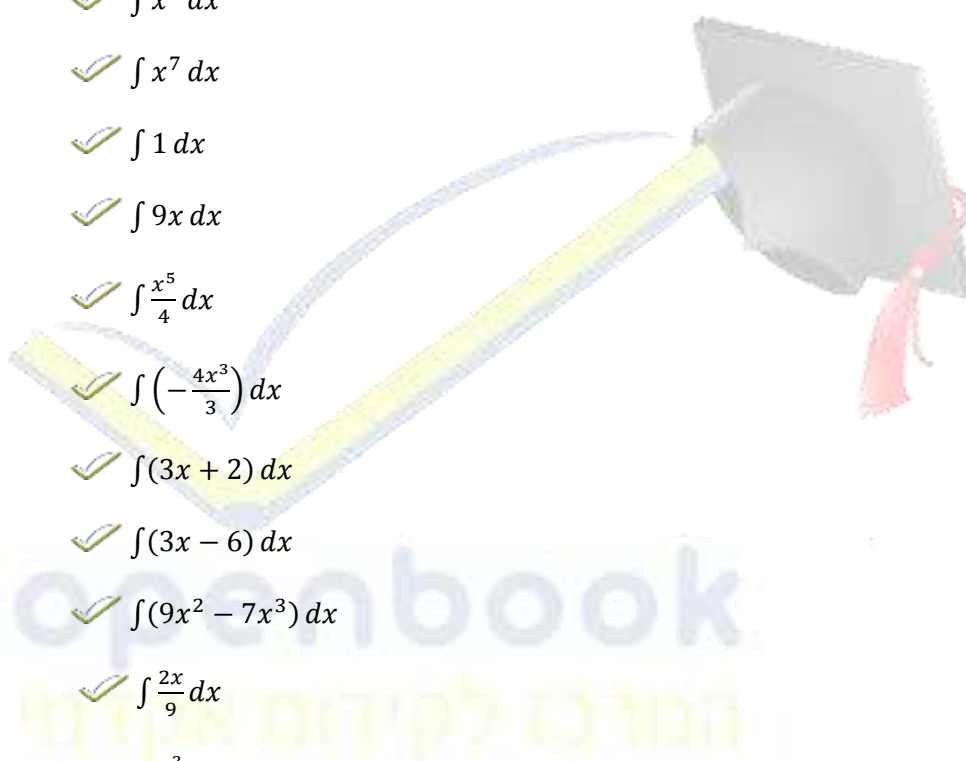
## אינטגרל של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

$$\int (mx + b)^n dx = \frac{(mx + b)^{n+1}}{m(n+1)} + C$$

כאשר  $n$  טבעי,  $m \neq 0$

### ✓ חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

- (7) ✓  $\int x dx$
- (8) ✓  $\int x^4 dx$
- (9) ✓  $\int x^7 dx$
- (10) ✓  $\int 1 dx$
- (11) ✓  $\int 9x dx$
- (12) ✓  $\int \frac{x^5}{4} dx$
- (13) ✓  $\int \left(-\frac{4x^3}{3}\right) dx$
- (14) ✓  $\int (3x + 2) dx$
- (15) ✓  $\int (3x - 6) dx$
- (16) ✓  $\int (9x^2 - 7x^3) dx$
- (17) ✓  $\int \frac{2x}{9} dx$
- (18) ✓  $\int \frac{x^2}{6} dx$
- (19) ✓  $\int (3 - 2x) dx$
- (20) ✓  $\int (3 - 2x)(x - 2) dx$



✓ (21)

הנגזרת של הפונקציה  $y$  היא  $y'=4x-3$   
גרף הפונקציה עובר דרך הנקודה  $(1,10)$ .  
מצא את הפונקציה  $y$ .

✓ (22)

נתונה הפונקציה שנגזרתה:  $f'(x) = 3x^2 - 5$   
גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=2$ .  
מצא את הפונקציה הקדומה  $f(x)$ .

✓ (23)

נתונה הפונקציה  $f(x)$  שנגזרתה:  $f'(x) = 4x^3 - 4x$   
א. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודת המינימום של הפונקציה.  
ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודת המקסימום של הפונקציה.  
ג. ערך הפונקציה בנקודות המינימום שלה הוא  $-5$ . מצא את  $f(x)$ .

✓ (24)

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x^3 - 54$   
ערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $-20$ .  
א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.  
ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

**פתרון:** א. 3. ב.  $f(x) = \frac{x^4}{2} - 54x + 101.5$

✓ (25)

נתונה נגזרת הפונקציה:  $f'(x) = 4x - x^2$

נתון:  $f(3)=4$

מצא את הפונקציה הקדומה.

**פתרון:** ב.  $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 5$

✓ (26)

נתונה נגזרת הפונקציה:  $f'(x) = 3x^2 - 8x$

ערך הפונקציה בנקודה  $x=1$  הוא  $-5$ .

חשב את ערך הפונקציה בנקודה  $x=0$ .

**פתרון:**  $(0, -2)$

✓ (27)

הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = 4x - x^2$

הפונקציה  $f(x)$  עוברת דרך הנקודה  $(3, 3)$ .

מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

**פתרון**  $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 6$



✓ (28)

נתון כי  $f'(x) = 16x^3 - 2$ ,

וערכה של הפונקציה  $f(x)$  בנקודת המינימום שלה הוא  $2$ .

א. עבור איזה ערך של  $x$  מקבלת הפונקציה  $f(x)$  מינימום?

ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

**פתרון** א.  $x=0.5$  ב.  $f(x) = 4x^4 - 2x + 2\frac{3}{4}$

✓ (29)

נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת:

$$f'(x) = \frac{2x^2-5}{3} \text{ ו- } f(3)=2.$$

חשב את  $f(0)$

**פתרון**  $f(0)=1$

 (30)

הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f'(x) = 6x^2 - 8x$

ערך הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $x=1$  הוא 5.

חשב את ערך הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $x=2$ .

**פתרון**  $f(2)=7$

 (31)

הפונקציה  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $y=-1$ .

נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = 3x^2 - 1$

מצא את  $f(2)$

**פתרון**  $f(2)=5$





## אינטגרל הלא מסוים פונקציות רציונליות

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx$$

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{f(x)^n} dx = \int f(x)^{-n} dx$$

$$\int f(x)^{-n} dx = \frac{f(x)^{-n+1}}{f'(x) \cdot (-n+1)} + C$$

### תרגיל

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(32) ✓  $\int \frac{4}{x^2} dx =$

(33) ✓  $\int -\frac{1}{2x^2} dx =$

(34) ✓  $\int \left(x^2 + 6x + \frac{6}{x^2}\right) dx =$

(35) ✓  $\int \frac{1}{(x+65)^2} dx$

(36) ✓  $\int \frac{12}{(5-3x)^2} dx$

(37) ✓  $\int \frac{9}{x^5} dx$

(38) ✓  $\int \left(-\frac{5}{2x^5} - 3x\right) dx$

(39) ✓  $\int \frac{3}{(x-4)^4} dx$

## ✓ אינטגרל לא מסוים פונקציות שורש

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{mx+b}} dx = \frac{1}{m}\sqrt{mx+b} + C$$

### תרגיל

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(40) ✓  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(41) ✓  $\int -\frac{4}{\sqrt{x}} dx$

(42) ✓  $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

(43) ✓  $\int \frac{4}{\sqrt{4-x}} dx$

(44) ✓  $\int \frac{5}{\sqrt{2-5x}} dx$

openbook  
המרכז לקידום אקדמי

## אינטגרל בשיטת ההצבה

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

### תרגיל

מצא את האינטגרל הבא ע"י זיהוי הנגזרת הפנימית – שיטת ההצבה

(45) ✓  $\int (x^3 + 2)^5 x^2 dx =$

(46) ✓  $\int 3 \cdot (x^3 + 4)^2 \cdot x^2 dx =$

(47) ✓  $\int x(x^2 + 9)^5 dx =$

(48) ✓  $\int (2x + 4x^3)(1 + x^2 + x^4)^2 dx =$

(49) ✓  $\int 5x^2 (x^3 - 3)^4 dx =$

(50) ✓  $\int 3x^2 \sqrt[4]{x^3 + 1} dx =$

(51) ✓  $\int x \sqrt{x^2 + 1} dx =$

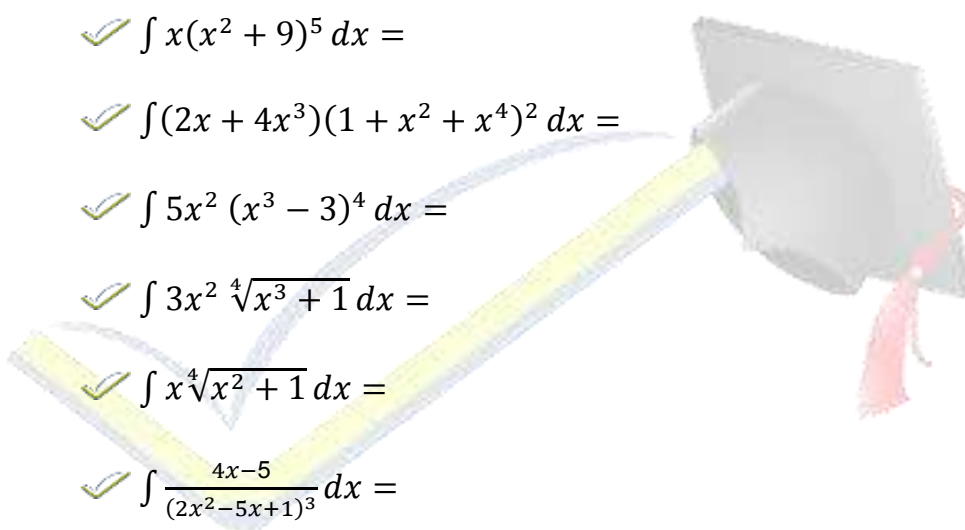
(52) ✓  $\int \frac{4x-5}{(2x^2-5x+1)^3} dx =$

(53) ✓  $\int \frac{2x}{(x^2+5)^2} dx =$

(54) ✓  $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}} dx =$

(55) ✓  $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx =$

(56) ✓  $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+5}} dx =$



openbook  
המדריך לקידום

## חישוב שטח

### האינטגרל המסוים

תהי  $f(x)$  פונקציה המגודרת בתחום  $a \leq x \leq b$

תהי  $F(x)$  פונקציה קדומה שלה כך שמתקיים  $F'(x)=f(x)$

ההפרש:  $F(b)-F(a)$  נקרא האינטגרל המסוים של הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $a \leq x \leq b$

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

אין צורך לרשום את  $C$  בקדומה של אינטגרל מסוים מכיוון:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx = (F(b) - C) - (F(a) - C) = \\ &= F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

### תרגיל

חשב את האינטגרלים המסויימים הבאים:

$$\int_0^3 x dx$$

$$\int_{-4}^0 x^3 dx$$

$$\int_{-1}^1 (2 - 5x^3) dx$$

$$\int_{-2}^0 (-4x^3 + 3x) dx$$

$$\int_1^4 (1 - x)^3 dx$$

$$\int_0^2 (2x - 4)^2 dx$$

### תרגיל

ידוע כי:  $\int_0^a (4x) dx = 2$  כאשר  $a > 0$

מצא את  $a$ .

### תרגיל

ידוע כי:  $\int_0^a (6x + 6) dx = 24$  כאשר  $a > 0$

מצא את  $a$ .

### תרגיל

ידוע כי:  $\int_0^a (2x - 1)^5 dx = 0$  כאשר  $a > 0$

מצא את  $a$ .

### תרגיל

נתון כי:  $\int_0^5 (x - a) dx = 2.5$

חשבו את ערכו של הפרמטר  $a$ .

### חישוב שטח

השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

הישרים  $x=a$ ,  $x=b$  וציר ה- $x$

(כאשר  $f(x)$  חיובית בקטע  $(a,b)$ )

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### חישוב השטח הכלוא בין גרפים של שתי פונקציות

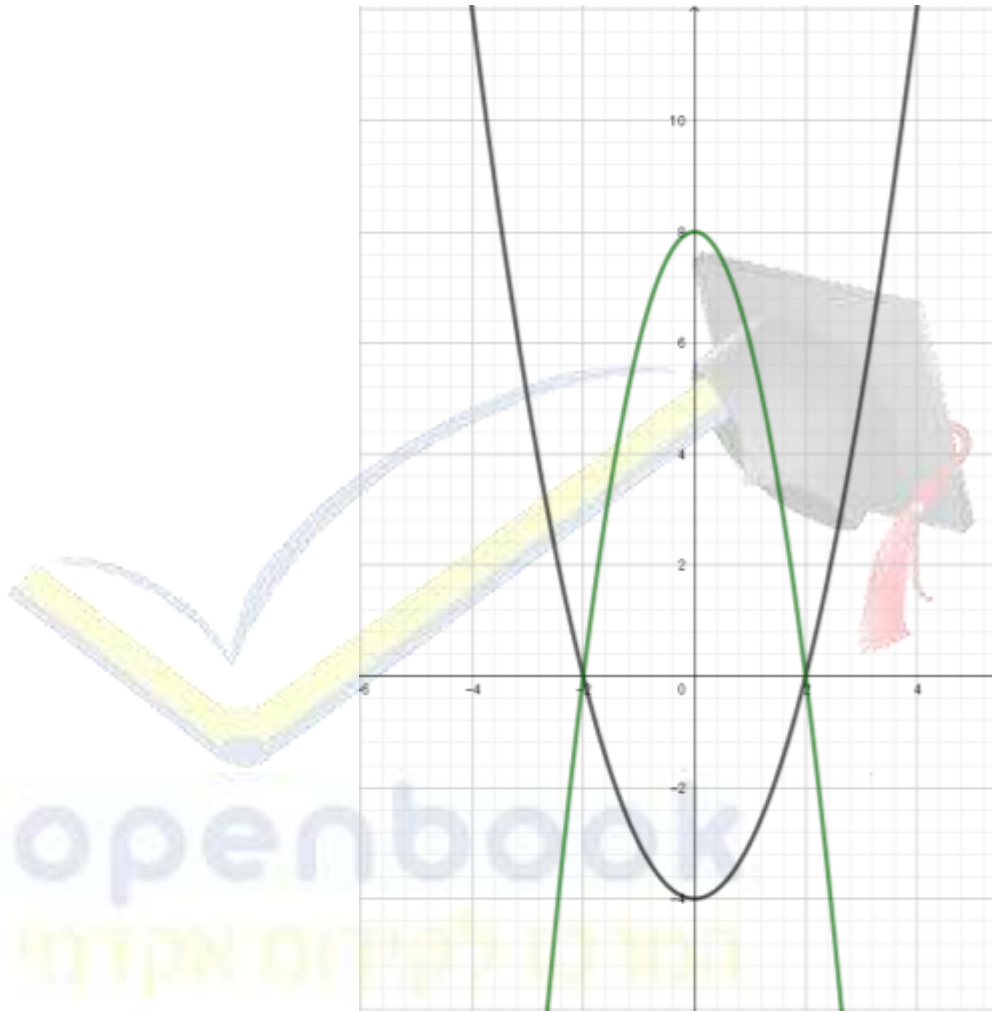
נבין את השטח של גרפים בין פונקציות לפי הדוגמה הבאה:

### תרגיל חלק א'

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = 8 - 2x^2$$

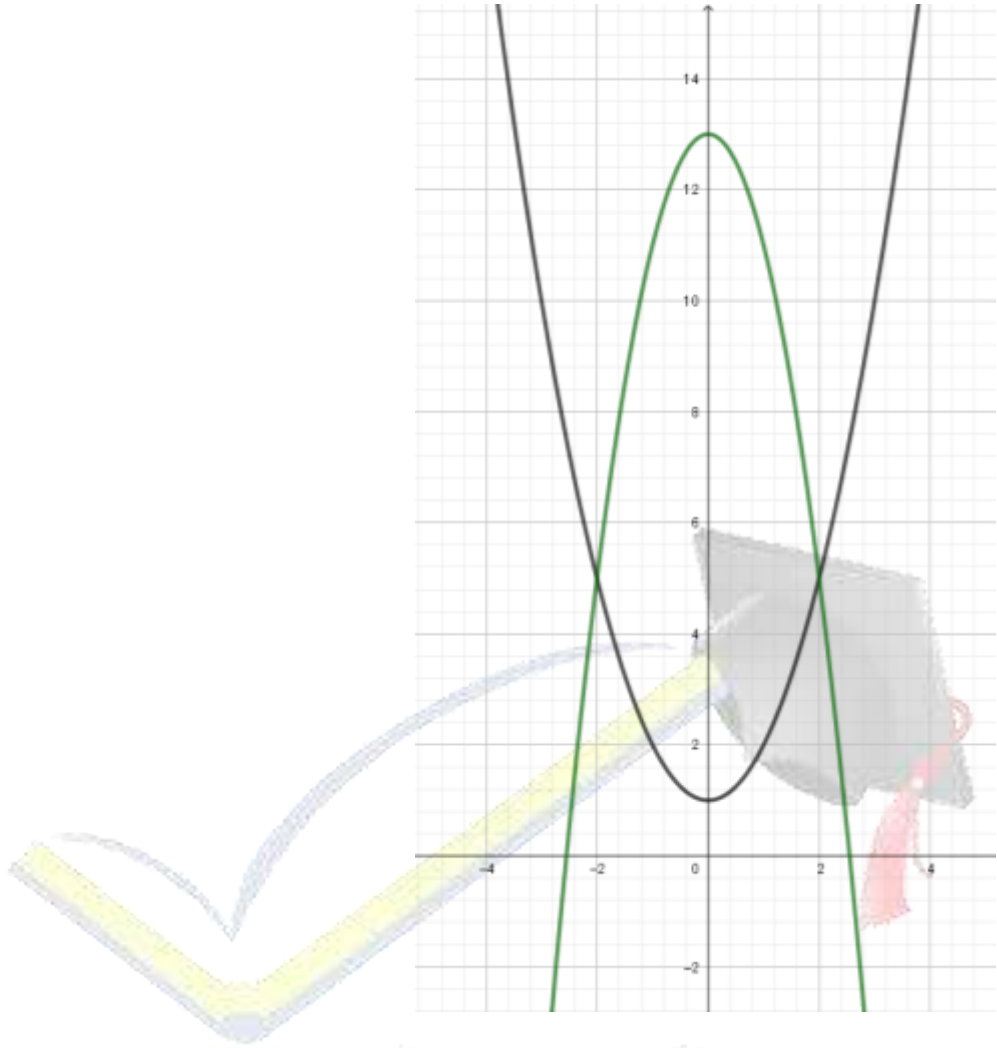


### תרגיל חלק ב'

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = 13 - 2x^2$$

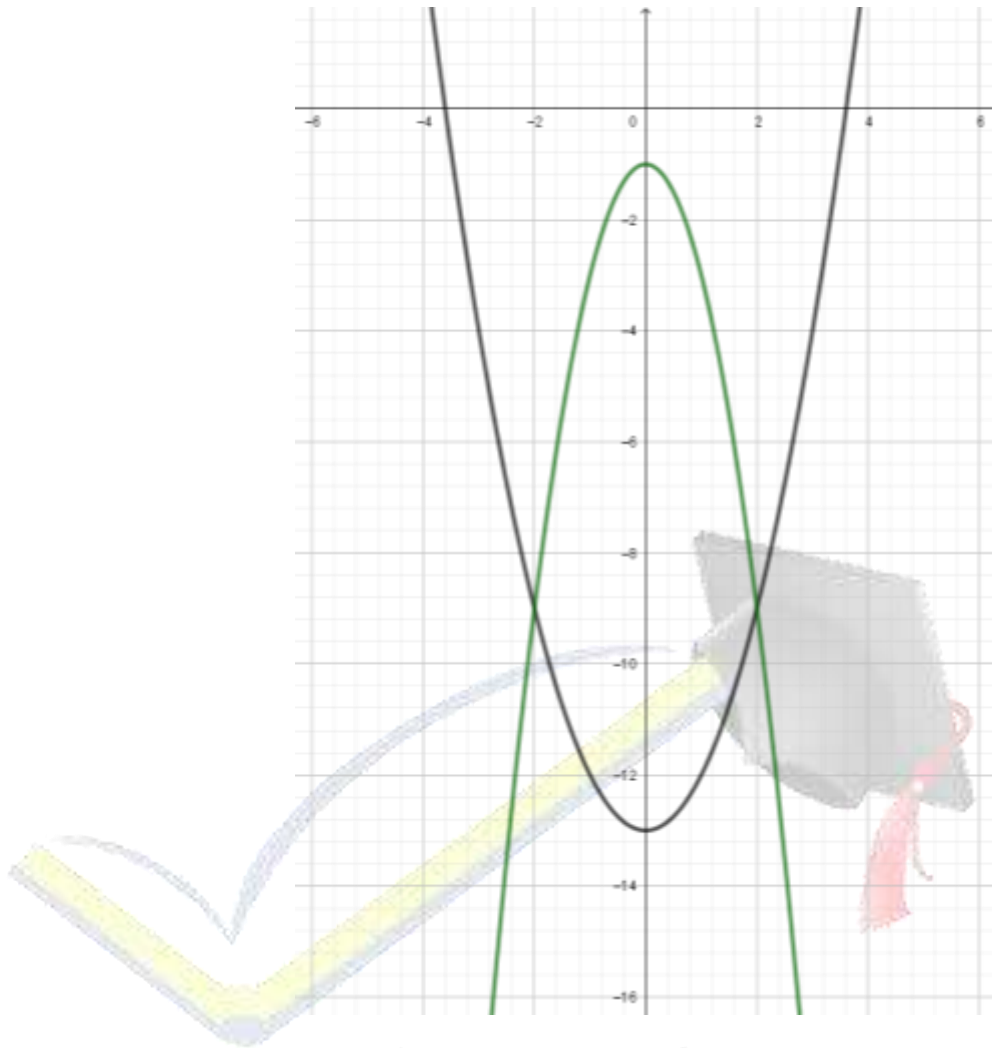


**תרגיל חלק ג' ✓**

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 13$$

$$g(x) = -1 - 2x^2$$



**תרגיל**

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 6$$

$$g(x) = 6 - 2x^2$$

**תרגיל**

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{4}x^2 + 6$  שני הצירים והישר  $x=4$

**תרגיל**

חשב את השטח הנמצא ברביע הרביעי והמוגבל ע"י גרף הפונקציה

$$y = x^2 - x - 6$$

**תרגיל**

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $y = x^2 - 4x + 4$  על ידי ציר ה-x, על ידי ציר ה-y ועל ידי הישר  $x=-1$ .



**תרגיל**

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $y = x^2 - 4x + 4$  עם הצירים

**תרגיל**

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = (x - 2)^2$  לבין הצירים

**תרגיל**

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $y = (x - 1)^4$  עם הצירים

**תרגיל**

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $y = 2x^2 - 3x - 5$  עם הצירים ברביע הרביעי

**תרגיל**

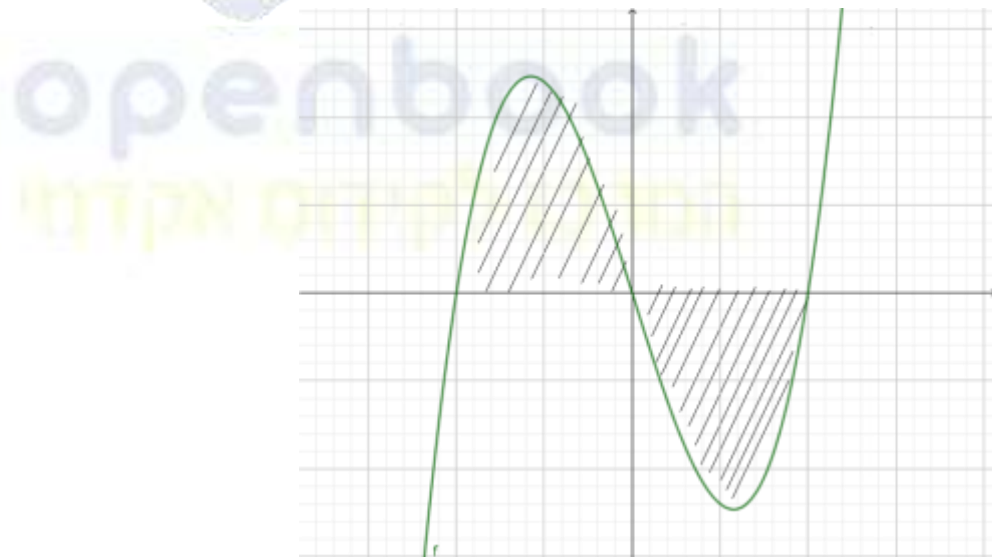
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = (x - 2)^3$  לבין הצירים

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $y = x(x^2 - 16)$  וציר ה- $x$

תרגיל

נתונה הפונקציה  $y = x(x^2 - 9)$  חשב את השטח המסומן בשרטוט



**תרגיל**

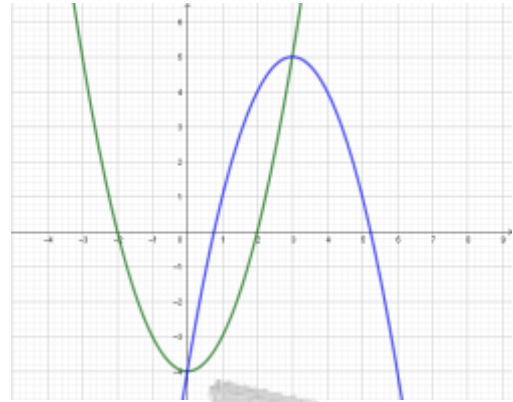
חשב את השטח המוגבל על ידי הפונקציה:  $y = x(x^2 - 15)$  והישר  $y = x$

**תרגיל**

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$y = x^2 - 4$$

$$y = -x^2 + 6x - 4$$



 **תרגיל**

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$y = 2x - x^2$$

$$y = x$$

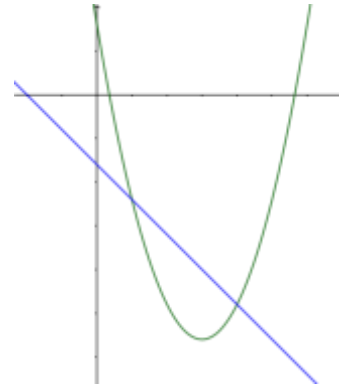


 **תרגיל**

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

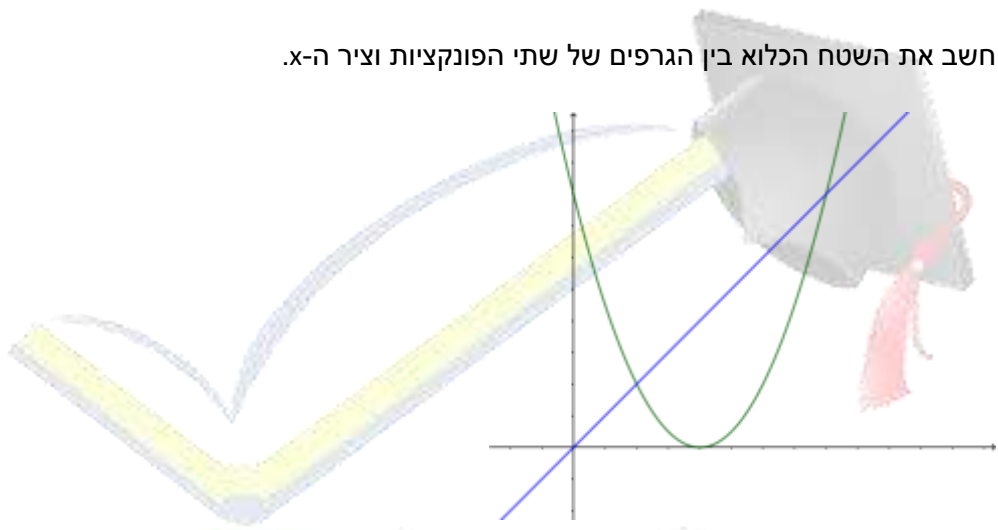
$$y = x^2 - 12x + 8$$

$$y = -2x - 8$$



**תרגיל**

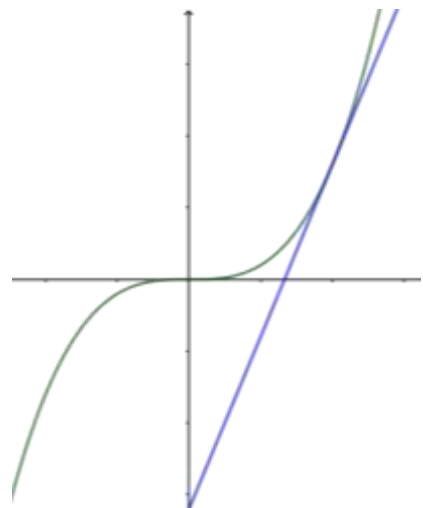
בציור מתואר הגרפים של הפונקציות:  $y = x$  ו-  $y = x^2 - 4x + 4$ .  
 חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $x$ .



**תרגיל**

לגרף הפונקציה  $y = x^3$  העבירו משיק בנקודה  $(2,8)$

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה המשיק וציר ה- $y$ .

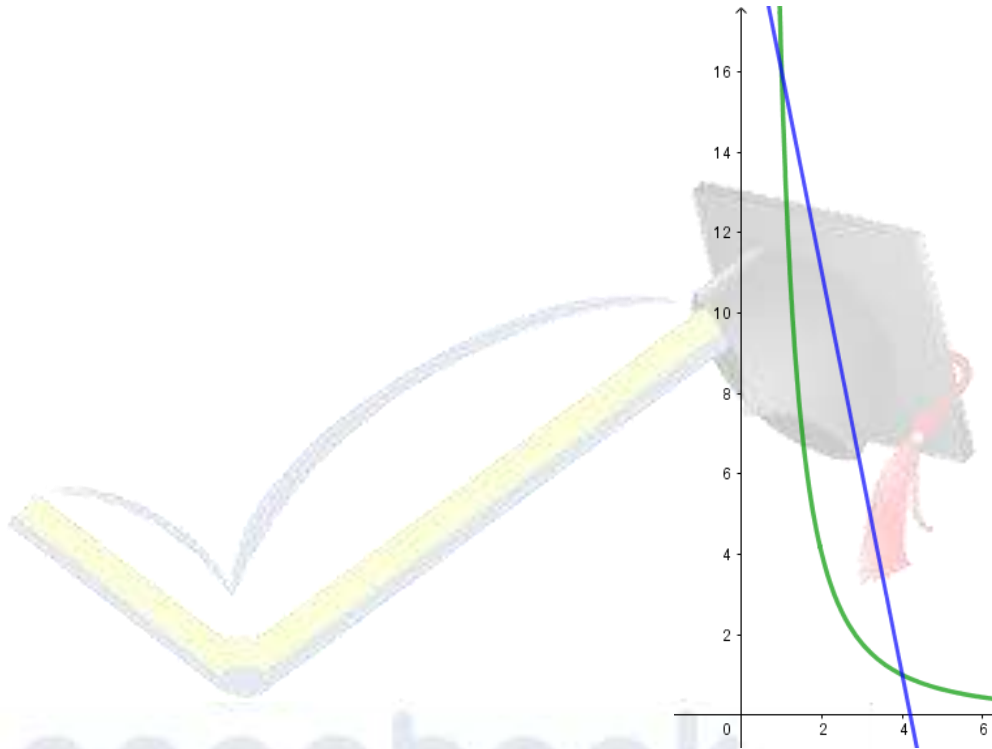


### תרגיל

הגרפים של הפונקציות:  $y = \frac{16}{x^2}$  ו-  $y = -5x + 21$  נחתכים בנקודות A ו-B (ברביע הראשון).  
שיעור ה-  $y$  של הנקודה A הוא 16 ושיעור ה-  $y$  של הנקודה B הוא 1.

א. מצא את שיעורי ה-  $x$  של נקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות ברביע הראשון.



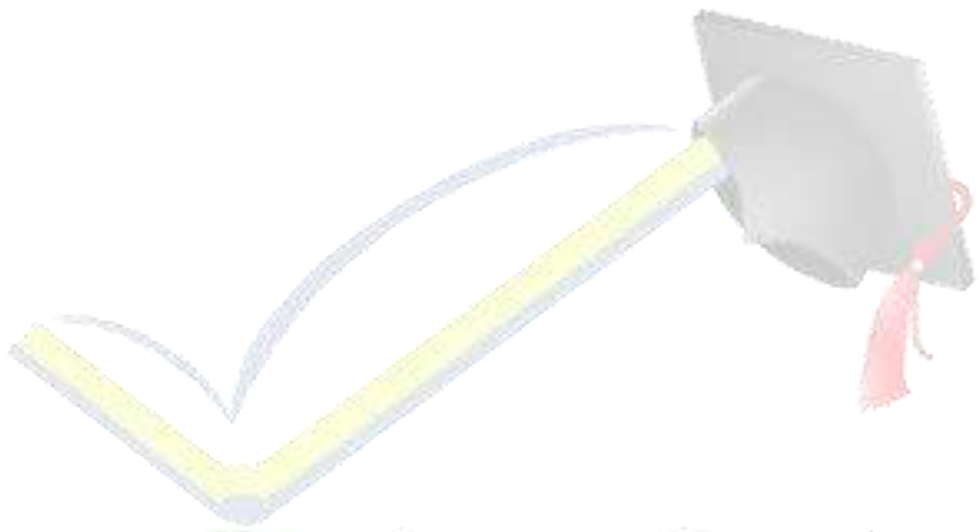
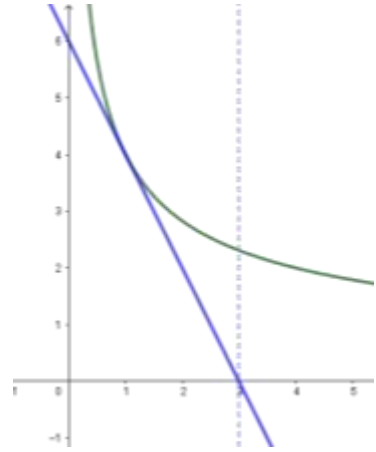
### תרגיל

לגרף הפונקציה:  $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$  העבירו משיק בנקודה בה  $y=4$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה-  $x$ .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר המאונך לציר ה-  $x$  שעובר בנקודה שמצאת בסעיף ב.



openbook  
 המרכז לקידום אקדמי