תלמידים יקרים

ברוכים הבאים ל OpenBook,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **חשבון דיפרנציאלי**: חקירת פונקציות פולינום, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר - בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נשמח שתשלחו לנו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

המרכז לקידום אקדמי OpenBook

תאריך עדכון: אוקטובר 2020

חשבון דיפרנציאלי

שיפוע של גרף פונקציה

שיפוע של פונקציה קווית

מהו השיפוע של שולחן הכתיבה שלכם?

אם היה לו שיפוע, והייתם מניחים עט/עפרון על השולחן, האם העט/עפרון נשאר על השולחן?

השולחן שלכם (לרוב) בעל שיפוע 0.

אם תרימו את השולחן מצדו הימני, השיפוע הוא חיובי.

אם תרימו את השולחן מצדו השמאלי השיפוע הוא שלילי.

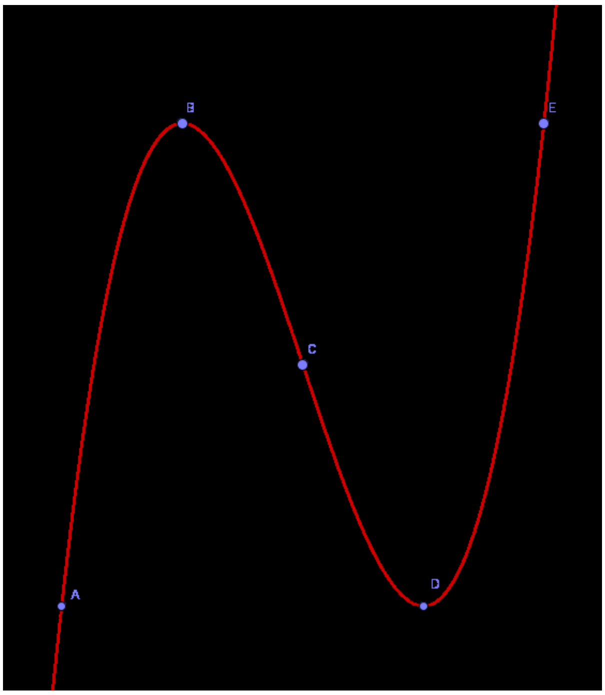
משוואת הקו הישר $y=mx+b$

b - היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

m – השיפוע של הישר.

שיפוע של פונקציה לא קווית

קבעו אם השיפוע בנקודות המסומנות חיובי, שלילי, או אפס



סיכום

מה שמאפיין פונקציה קווית הוא שיפוע קבוע.

פונקציה שאינה קווית השיפועים שונים בנקודות שונות

משיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודת ההשקה.

שיפוע המשיק משתנה בכל נקודה על גבי הפונקציה שבציור.

נגזרת

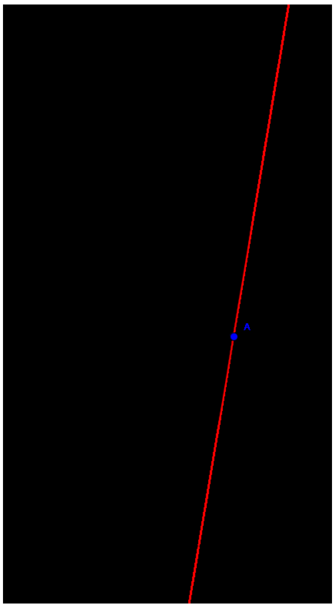
באנליזה (חשבון דיפרנציאלי) מחשבים את שיפוע המשיק בעזרת הנגזרת של הפונקציה, בנקודת ההשקה.

הנגזרת של הפונקציה בנקודת ההשקה = שיפוע המשיק.

m=y'(x=__)

(1)

לדוגמא הפונקציה $y=x^2$ בנקודה A(3,9) העבירו משיק,



איך נמצא את שיפוע המשיק?

נגזור את הפונקציה ונציב את הנקודה.

אנו נרשום את הנתונים בטבלת הנתונים הבאה:

בכל תרגיל:

השלב הראשון הוא שלב הנתונים – נרשום את הנתונים בטבלה.

y=___________
y'=__________
m=__________
x=___________

השלב השני הוא נוסחה והצבה.

m = y' (x=____)

(2)

נתונה הפונקציה $y=2x^3$ בנקודה x=3 העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

(3)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^3}{3}$ בנקודה x=2 העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

(4)

נתונה הפונקציה $y=2x^2-4x-2$ בנקודה (2,10) העבירו משיק. מצא את שיפוע המשיק.

(5)

נתונה הפונקציה $y=3x^2-2$ בנקודה (3,4) העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

(6)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^3}{3}-2$ בנקודה (2,10) העבירו משיק. מצא את משוואת המשיק.

(7)

נתונה הפונקציה $y=x^2$ בנקודה x=2 העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

(8)

נתונה הפונקציה $y=8-2x^2$. בנקודה A(1,6) העבירו משיק לפרבולה. מצא את משוואת המשיק.

(9)

נתונה הפונקציה $y=3x^2-5x+1$. מעבירים לפונקציה משיק ששיפועו 7. מצא את נקודת ההשקה

(10)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2}{2}-x+3$. לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו 1. מצא את נקודת ההשקה.

(11)

ישר משיק לגרף פונקציה $y=x^2+ax+7$ בנקודה x=3. שיפוע הישר הוא 3-. מצא את a.

(12)

נתונה הפונקציה $y=x^2+ax+4$ בנקודה x=1 העבירו משיק ששיפועו 3.

(א) מצא את a.

(ב) מצא נקודה על הפונקציה אשר בה שיפוע המשיק הוא 5.

(13)

נתונה הפונקציה $y=x^2-4x$.

עבור איזה ערך של x, מתאפסת הנגזרת?

(14)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

מצא את הנקודה שעבורה f’(x)=0

(15)

נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 3x$.

עבור איזה ערך של x, הנגזרת שווה ל-1?

(16)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.

עבור איזה ערך של x ערך הנגזרת שווה לאפס.

פונקציות ממשיות זוגיות ואי זוגיות

סימטריה

סימטרייה היא תכונה של צורה.

צורה היא סימטרית, אם אפשר להעתיק אותה על עצמה על ידי **שיקוף**, **הזזה או סיבוב**.

טרנספורמציות איזומטריות (איזומטרית=שוות מידה) הן העתקות של המישור על עצמו השומרות על מרחקים.

בהעתקות אלה המרחקים נשמרים, ולכן כל קטע יועתק תמיד לקטע **השווה** לו **באורכו**.

הפירוש האינטואיטיבי של תכונה זו הוא שהצורות המועתקות **אינן משתנות** (לא ב"צורתן" ולא ב"גודלן").

העתקת שיקוף

השיקוף בישר y הוא העתקה של כל נקודה במישור אל "**תמונת הראי**" שלה ביחס לישר y.

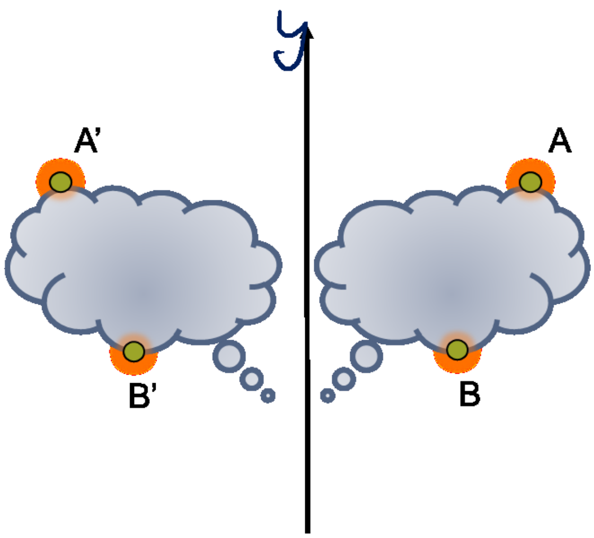
צורות מועתקות אל "**תמונת הראי**" שלהן, שהרי הן מורכבות מנקודות.

כל נקודה מועתקת ל"תמונת הראי" שלה,

למשל: A מועתקת ל–A′ ,

B מועתקת ל– B′,

ובסך הכול מתקבלת צורת הענן החופפת בדיוק לענן המקורי.



העתקה סיבובית

העתקת הסיבוב מסובבת את כל המישור סביב נקודה מסוימת (הנקראת **נקודת הסיבוב**) בזווית מסוימת (הנקראת **זווית הסיבוב**).

כל הנקודות במישור מסתובבות סביב אותה נקודה ובאותה זווית.

את העתקת הסיבוב מאפיינים אפוא שני נתונים: **נקודת הסיבוב וזווית הסיבוב**.

O – היא **נקודת הסיבוב**

α - היא **זווית הסיבוב**

כל הנקודות של הצורה מסתובבות סביב O בזווית α

העתקת הסיבוב מסובבת את כל המישור סביב נקודה אחת.

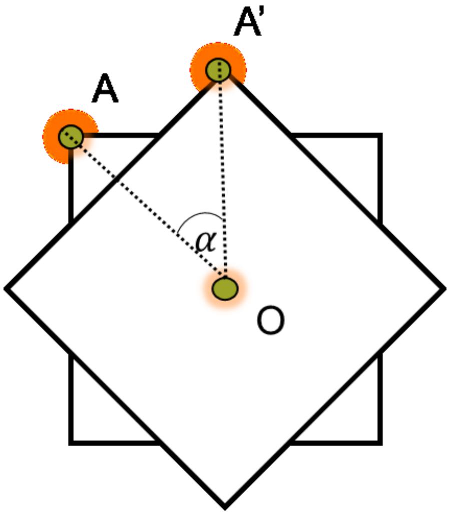
נקודה זו נקראת, כאמור, **נקודת הסיבוב.**

נקודה זו נשארת במקומה במהלך הסיבוב, ולכן היא משמשת **נקודת שֶׁבֶת** של ההעתקה.

כאשר מסובבים צורה, נקודת הסיבוב יכולה להיות מחוץ לצורה, עליה או בתוכה.

כאשר נקודה A מסתובבת סביב מרכז O ומגיעה אל התמונה A', מידת הסיבוב שלה היא מידת הזווית AOA'.

במתמטיקה נהוג לראות בזווית הסיבוב **זווית בעלת כיוון**. כאשר התנועה היא נגד כיוון מחוגי השעון, זווית הסיבוב מוגדרת זווית חיובית. כאשר התנועה היא עם כיוון השעון, זווית הסיבוב מוגדרת זווית שלילית.



העתקה הזזה

העתקת ההזזה "מסיעה" את כל נקודות המישור בכיוון מסוים ובמידת אורך מסוימת.

כיוון ההזזה ומרחק ההזזה נקבעים לפי **חץ ההזזה**.

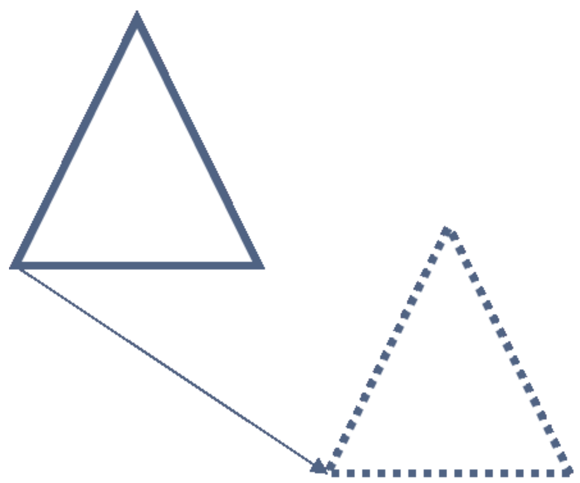
אפשר לתאר את חץ ההזזה כ"**פקודה**" שלפיה מבצעים את ההזזה.

כלומר, ההזזה מעתיקה את כל נקודות המישור כך:

כל הנקודות מועתקות **באותו כיוון** - הכיוון של חץ ההזזה.

כל הנקודות זזות **באותה מידת אורך**,

כלומר, המרחק בין כל נקודה לבין תמונתה (הנקודה המתקבלת ממנה לאחר ההזזה) הוא קבוע **ושווה לאורך החץ הנתון**.



הערות להגדרות השיקוף, הסיבוב וההזזה

- כל ההעתקות האלה הן **העתקות של נקודות**. העתקה של צורה (סיבוב, הזזה או שיקוף שלה) מתקבלת מהעתקת כל הנקודות המרכיבות אותה.

- כל ההעתקות האלה פועלות על כל נקודות המישור. לעתים קרובות אנחנו מתעניינים בהעתקה של צורה מסוימת, אבל יש לזכור שיחד אתה נעות גם כל שאר נקודות המישור, גם אם אינן מסומנות באופן מפורש.

- נזכיר את המרכיבים החשובים של כל אחת מן ההעתקות:

בשיקוף - ישר השיקוף

בהזזה - כיוון ההזזה ומידת ההזזה (או בקיצור: וקטור ההזזה)

בסיבוב - נקודת הסיבוב וזווית הסיבוב.

כל שינוי באחד המרכיבים של העתקה מסוימת יוצר העתקה אחרת, ולכן יש בעצם אינסוף העתקות שיקוף אפשריות, אינסוף העתקות הזזה אפשריות ואינסוף העתקות סיבוב אפשריות.

נקודות שֶבֶת הן נקודות הנשארות במקומן בהעתקה.

בשיקוף - כל הנקודות על קו השיקוף הן נקודות שבת

בסיבוב (לא זהותי, כלומר שאינו סיבוב ב- 360° או בכפולות של 360°) **-** רק נקודת הסיבוב היא נקודת שבת.

בהזזה (לא זהותית, כלומר שאינה בחץ שאורכו 0) **-** אין כלל נקודות שבת.

זוהי צורה בעלת סימטרייה שיקופית,

והיא מתאימה לדימוי של סימטרייה בחיי היומיום.

החזית המערבית של קתדרלת נוטרדאם דה ריימס, צרפת,

המחוננת בסימטריית שיקוף ימין-שמאל בעיצובה הכולל

ציור של פרפר עם סימטריה דו צדדית,

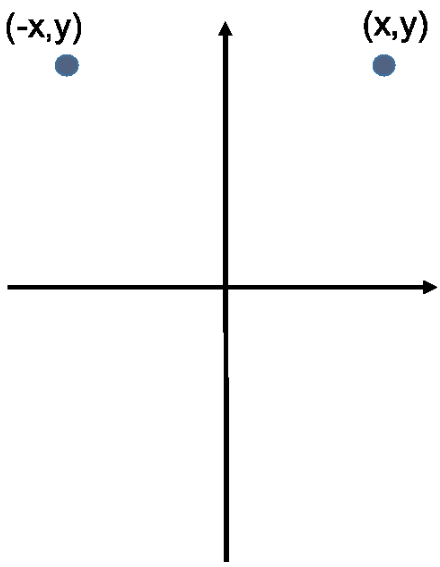
הצדדים ימין ושמאל כתמונת מראה אחד של השני

<u>**סימטריה**</u>

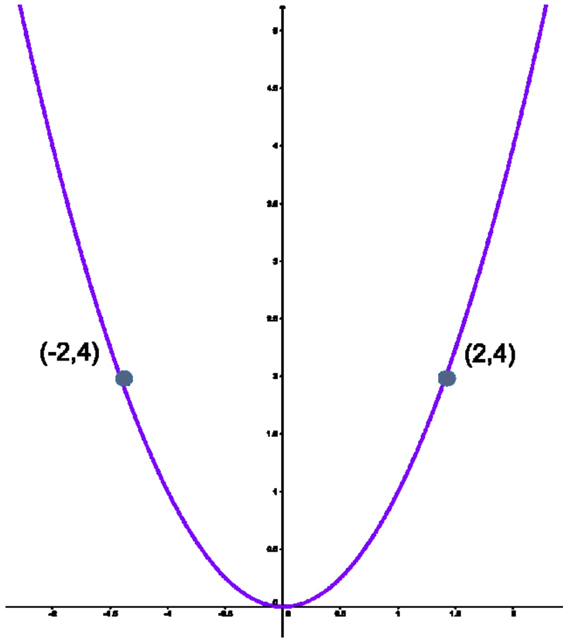
<u>**הגדרה: סימטרית ביחס לציר ה-y**</u>

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה-y** ,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (-x,y) שייכת לה.



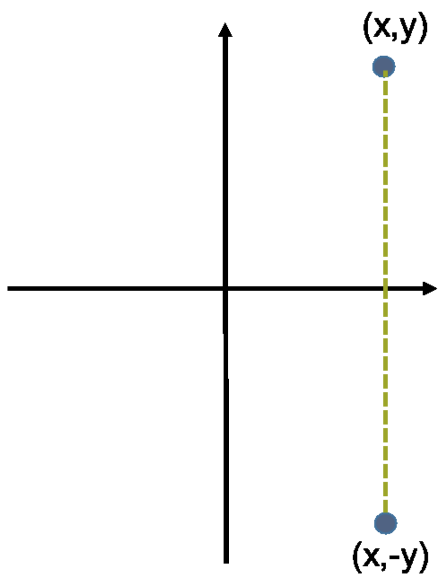
$y = x^2$



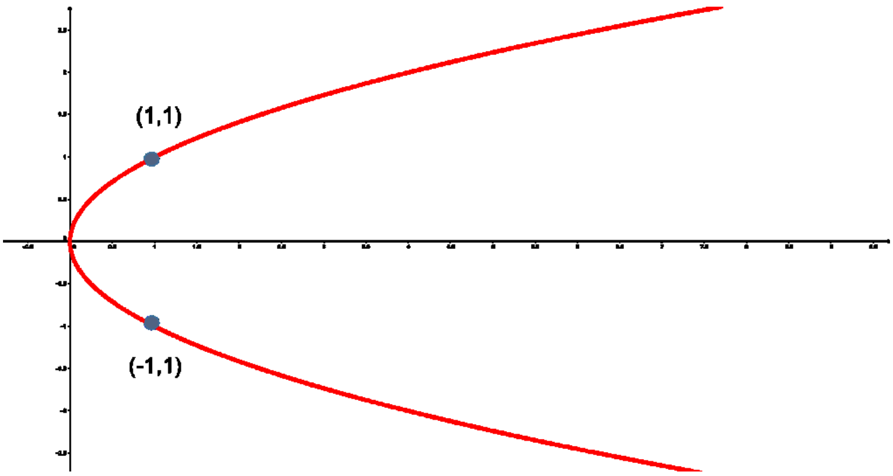
הגדרה: סימטרית ביחס לציר ה-x

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה-x** ,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (x,-y) שייכת לה.



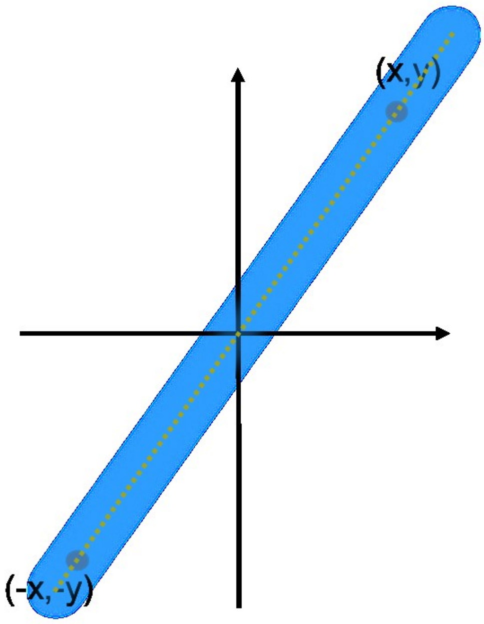
$y^2 = x$

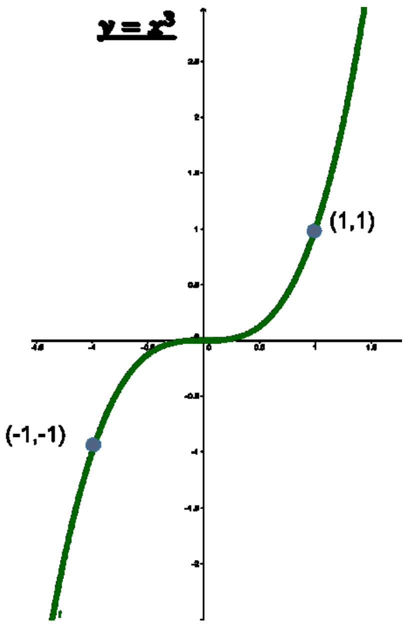


הגדרה: סימטרית ביחס לראשית הצירים

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לראשית הצירים**,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (-x,-y) שייכת לה.




y = x³
(1,1)
(-1,-1)

פונקציה זוגית

פונקציה f(x) נקראת פונקציה זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: f(-x)=f(x)

פונקציה ממשית $f\colon D \to F$ נקראת **פונקציה זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של f(x) סימטרי ביחס ל- x=0, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = f(x)$

איך נוכיח את קיום התנאי f(-x)=f(x) ?

כדי להוכיח את קיום התנאי f(-x)=f(x) מציבים בתבנית הפונקציה (–x) במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם f(x).

למשל: כדי להראות שהפונקציה $\mathrm{f(x)} = x^2$ היא פונקציה זוגית, נראה כי לכל x ממשי מתקיים:

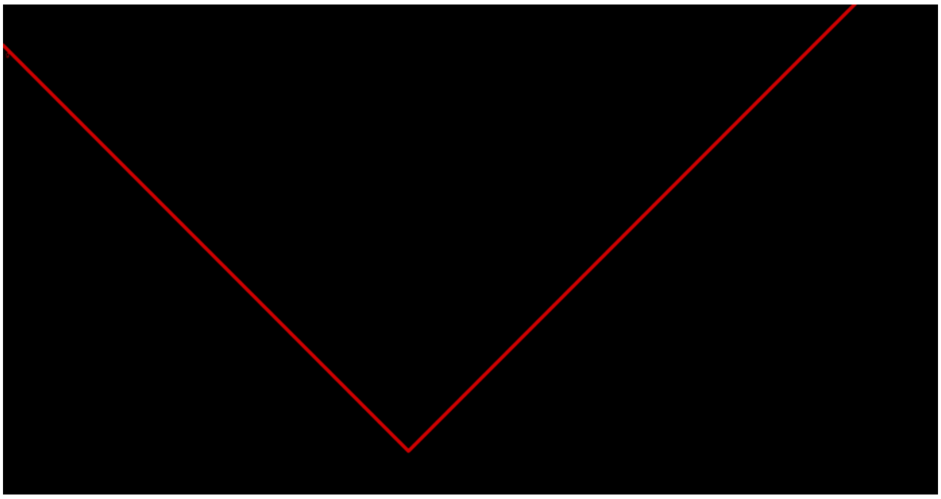
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים שמתאימים להם ערכי y שונים.

למשל כדי להראות שהפונקציה: $f(x) = x^2 + x$ איננה זוגית, די להראות ש-

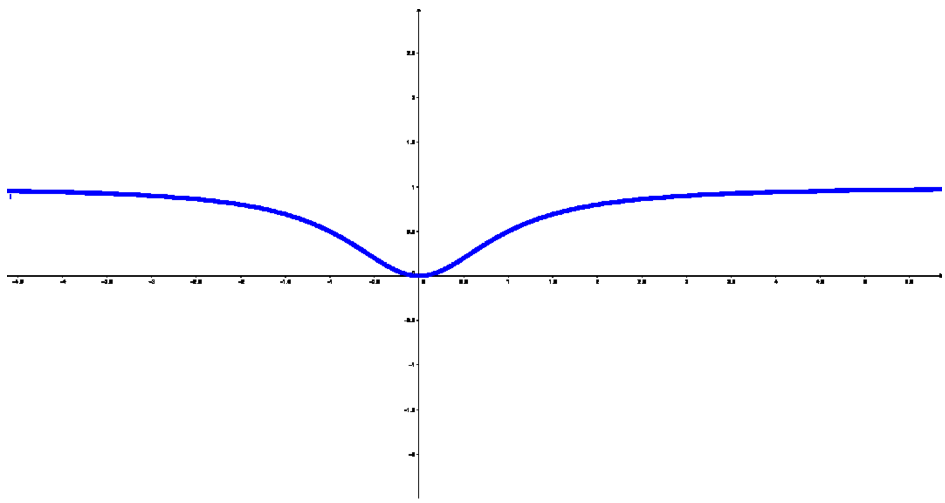
f(-3)=6 ואילו f(3)=12.

$$\boldsymbol{y = |x| - 1}$$



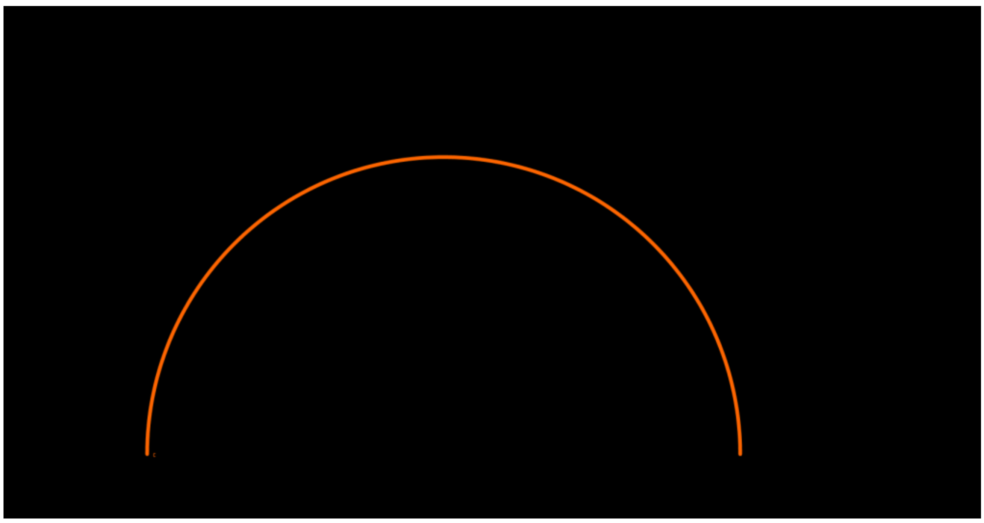
הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{x^2 + 1}}$$



הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

$$y = \sqrt{2 - x^2}$$



הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

פונקציה אי זוגית

פונקציה f(x) נקראת פונקציה אי-זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: f(-x)=-f(x)

פונקציה אי זוגית היא פונקציה שהגרף שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים

(אם מסובבים את הגרף ב-180° סביב ראשית הצירים, מתקבל שוב את הגרף המקורי)

פונקציה ממשית $f: D \to F$ נקראת **פונקציה אי-זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של f(x) סימטרי ביחס ל- x=0, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = -f(x)$

איך נוכיח את קיום התנאי f(-x)=-f(x) ?

כדי להוכיח את קיום התנאי f(-x)=-f(x) מציבים בתבנית הפונקציה (–x) במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם -f(x).

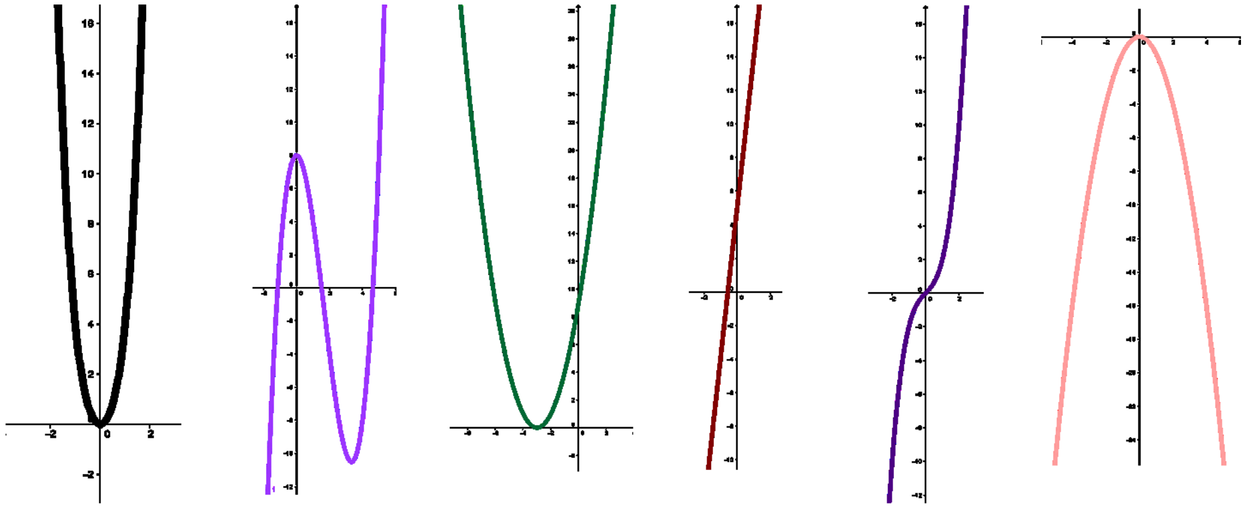
למשל: כדי להראות שהפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}$ היא פונקציה אי-זוגית, נראה כי לכל x ממשי השונה מ-0 מתקיים:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2} + \frac{1}{2\cdot(-x)} = \frac{-x^3}{2} + \frac{1}{-2x} = -\left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}\right) = -f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה אי זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים אשר ערכי ה-y המתאימים להם אינם מספרים נגדיים.

למשל כדי להראות ש הפונקציה: $f(x) = x^2 + x$ איננה זוגית, די להראות ש- f(-3)=6 ואילו f(3)=12.

קבע עבור כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית או אי זוגית או שהיא לא זוגית ולא אי זוגית.



$y=-x^2$ $\quad$ $y=x^3+x$ $\quad$ $y=9x+5$ $\quad$ $y=(x+3)^2$ $\quad$ $y=x^3-5x^2+8$ $\quad$ $y=x^4+3x^2$

השפעת פעולות חשבון על תכונת זוגיות/ אי זוגיות של פונקציות

הסכום של כל שתי פונקציות זוגיות הוא פונקציה זוגית.

המכפלה של כל שתי פונקציות אי זוגיות היא פונקציה זוגית.

השוואה בין פונקציה זוגית לאי זוגית

כדי לשרטט גרף של פונקציה זוגית או אי זוגית, מספיק למצוא את הקיצון ונקודות החיתוך בתחום ש: $x \geq 0$.

אנו יכולים להסיק לפי התכונה של זוגיות / אי זוגיות איך הפונקציה מתנהגת בצידו האחר של ציר ה-y (כאשר $x \leq 0$)

נסכם את הדומה והשונה בין פונקציה זוגית לאי-זוגית

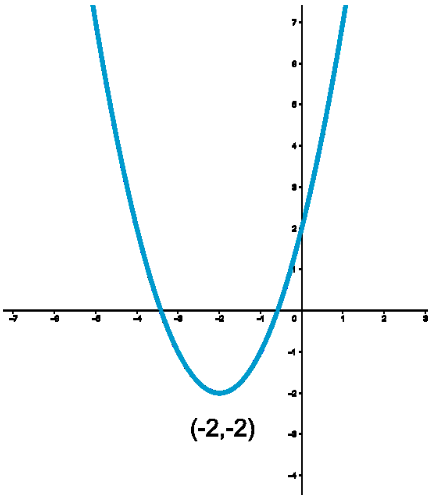
הקשר בין גרף הפונקציה לנגזרתה

תרגיל (1)

איך נשרטט סקיצה של ‘ f ?

מה אנחנו יכולים להסיק מהסתכלות על גרף f על גרף ‘ f ?

נקודות הקיצון של f הן נקודות האפס של ‘ f



תחומי הירידה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת שלילית

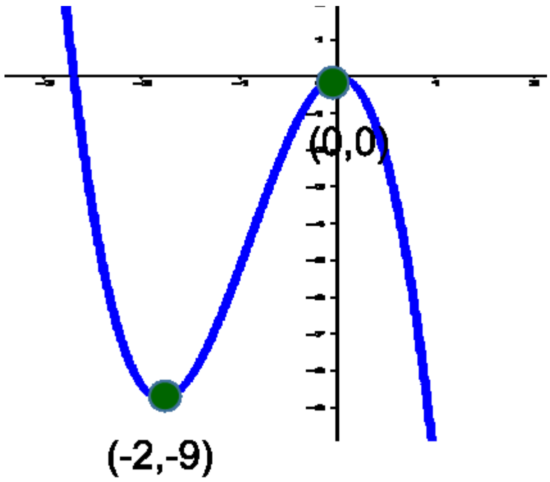
ולכן הם תחומי השליליות של ‘ f

תחומי העליה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת חיובית

ולכן הם תחומי החיוביות של ‘ f

תרגיל (2)

שרטט סקיצה של f' ושל f''.



תרגיל (3)

שרטט סקיצה של f' של הפונקציה $y = 2x^2 - 8x + 6$

<u>תרגיל (4)</u>

שרטט סקיצה של f' של הפונקציה $y = x^3 - 3x$

<u>תרגיל (5)</u>

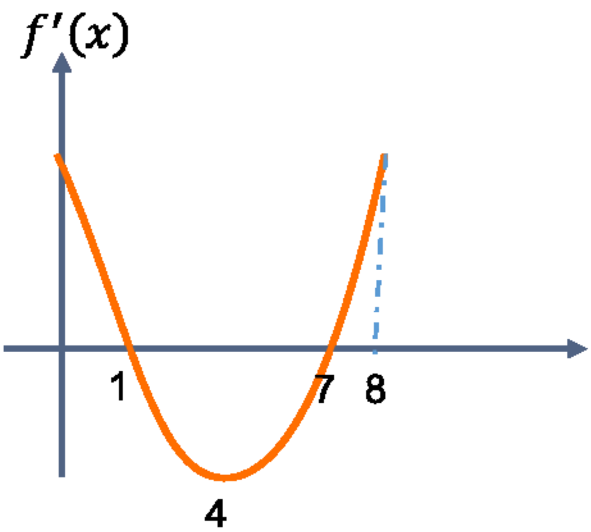
הפונקציה f(x) מוגדרת בתחום $0 \le x \le 8$. בציור מתואר גרף הנגזרת f’(x).

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x).

ב. מצא את שיעור ה-x בנקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון גם: f(0)=-2 , f(4)=0 , f(8)>0.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x).



<u>תרגיל (6)</u>

לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- x=1. f’(x) היא הנגזרת של f(x).

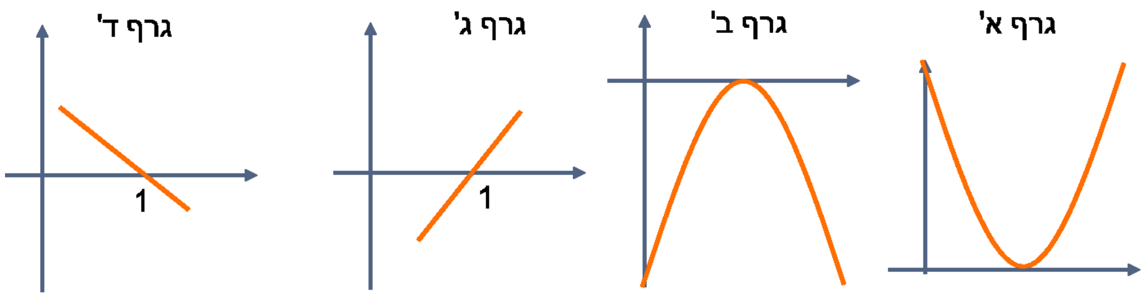
א. מהו שיעור ה-x של הנקודה בה הנגזרת f’(x) שווה לאפס?

ב. מהי הנקודה שבה חותך גרף הנגזרת f’(x) את ציר ה-x?

ג. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f’(x) עבור x>1?

ד. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f’(x) עבור x<1?

ה. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f’(x)?



תרגיל (7)

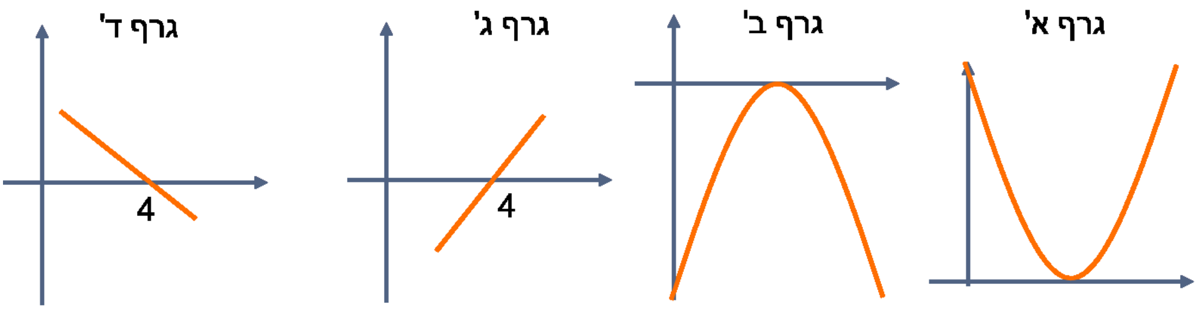
לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מקסימום ב- x=4.

f′(x) היא הנגזרת של f(x).

א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f′(x) עבור x>4?

ב. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f′(x) עבור x<4?

ג. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f′(x)?

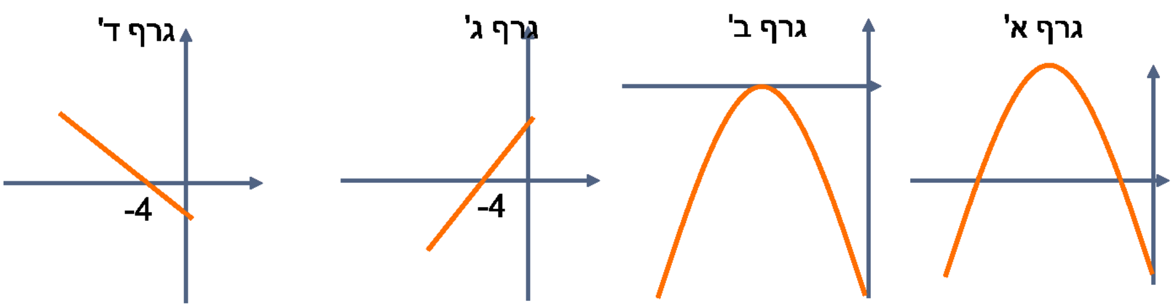


תרגיל (8)

לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- x=-4.

f′(x) היא הנגזרת של f(x).

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f′(x)?



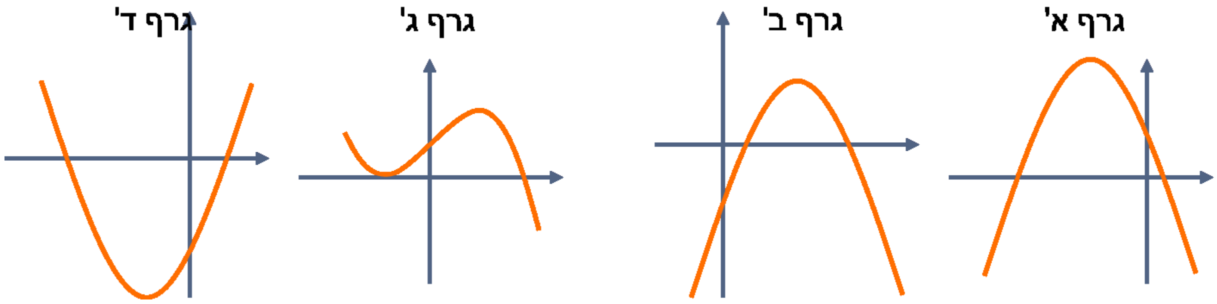
תרגיל (9)

לפונקציה f(x) יש שתי נקודות קיצון בלבד.

נקודת מקסימום ב- $x=2$ ונקודת מינימום ב- $x=-4$.

$f'(x)$ היא הנגזרת של $f(x)$.

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$?



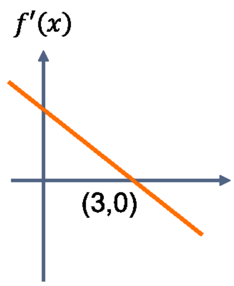
תרגיל (10)

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעור ה-x בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון: $f(3)=2$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

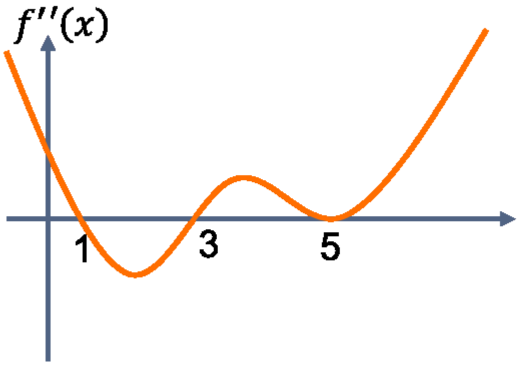


תרגיל (11)

נתונה הפונקציה $f(x)$. בציור מתואר גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

א. מצא את שיעור ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.


$f''(x)$
1
3
5

חקירת פונקציה

תחום הגדרה

תחום ההגדרה של שבר

הוא שהמכנה שלו שונה מאפס

$y = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

$y = \frac{1}{x-4} \quad \begin{array}{r} x-4 \neq 0 \\ x \neq 4 \end{array}$

שורש ריבועי לא מוגדר
עבור מספרים שליליים

$y = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

$y = \sqrt{x-2} \quad \begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{array}$

<u>נקודת קיצון נקודות מקסימום מקומי</u>

בנקודות המינימום והמקסימום הנגזרת של הפונקציה שווה לאפס.

לכן, אם נרצה למצוא את שיעור ה-x של נקודות הקיצון (min/max) נמצא את הנגזרת ונשווה את הנגזרת לאפס.

<u>אז מצאנו נקודת קיצון, איך נקבע את סוג הקיצון (min/max) ?</u>

לשם כך ניתן להיעזר באחת משתי השיטות:

(1) באמצעות טבלה

(2) באמצעות נגזרת שנייה (קיימים מקרים שלא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה !!)

<u>קביעת נקודת קיצון באמצעות טבלה</u>

נקודה גדולה מהנק' החשודה	שיעור x של נק' קיצון	נקודה קטנה מהנק' החשודה	
			נציב את שיעור x בנגזרת y'
			אם y'>0 נצייר חץ עולה אם y'<0 נצייר חץ יורד

קביעת נקודת קיצון באמצעות נגזרת שנייה

שימו לב !! קיימים מקרים בהם לא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה ולכן מומלץ לקבוע באמצעות טבלה !

נגזור שוב את הפונקציה ונציב את שיעור ה-x של נקודת הקיצון.

אם $y''>0$ אז זאת נקודת מינימום

אם $y''<0$ אז זאת נקודת מקסימום

תחומי עלייה וירידה

נראה באמצעות הטבלה מתי יש עלייה ומתי יש ירידה

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר y.

הנקודה $A(\quad,\quad)$ "יושבת" על ציר y.

נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר x.

הנקודה $B(\quad,\quad)$ "יושבת" על ציר x.

שרטוט סקיצה

נסמן במערכת הצירים את נקודות החיתוך עם הצירים ,

את נקודות הקיצון שמצאנו (מינימום ומקסימום)

ניצור כובעים לפי נקודת סיווג נקודות הקיצון (אם מינימום: ∪ מקסימום: ∩)

נחבר בין הנקודות ונקבל את הסקיצה של גרף הפונקציה

תרגילים חקירת פונקציית פולינום

(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

א. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה חותך את ציר ה-y בנקודה B.

מצא את השיעורים של הנקודה B.

תרגילים חקירת פונקציה רציונלית מבגרויות 3-4 יח"ל

פונקציה רציונלית היא פונקציה שניתן לכתוב אותה כמנה של שתי פונקציות פולינום