תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא , המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

חוברת זו בנושא **חשבון דיפרנציאלי**: חקירת פונקציות טריגונומטריות, שורש ומנה.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל service@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

תאריך עדכון: דצמבר 2016

חשבון דיפרנציאלי

804+805+806+807

שיפוע של גרף פונקציה

שיפוע של פונקציה קווית

מהו השיפוע של שולחן הכתיבה שלכם?

אם היה לו שיפוע, והייתם מניחים עט/עפרון על השולחן, האם העט/עפרון נשאר על השולחן?

השולחן שלכם (לרוב) בעל שיפוע 0.

אם תרימו את השולחן מצדו הימני, השיפוע הוא חיובי.

אם תרימו את השולחן מצדו השמאלי השיפוע הוא שלילי.

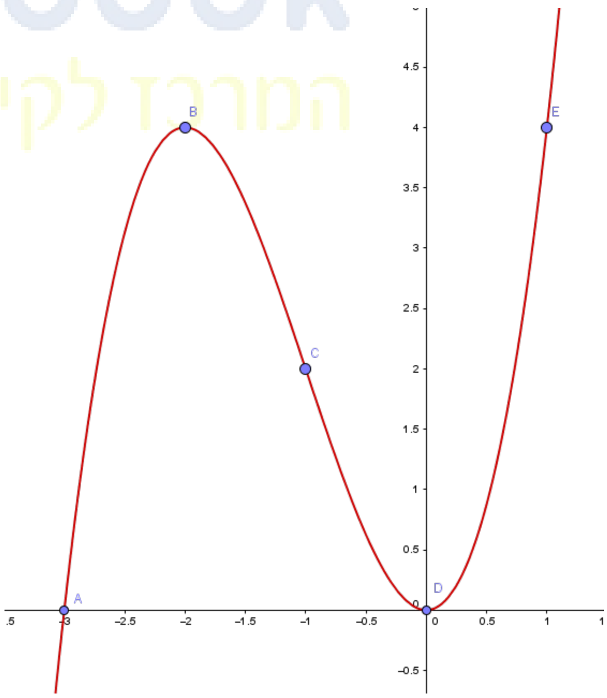
משוואת הקו הישר $y=mx+b$

b - היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

m – השיפוע של הישר.

שיפוע של פונקציה לא קווית

קבעו אם השיפוע בנקודות המסומנות חיובי, שלילי, או אפס



סיכום

מה שמאפיין פונקציה קווית הוא שיפוע קבוע.

פונקציה שאינה קווית השיפועים שונים בנקודות שונות

משיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודת ההשקה.

שיפוע המשיק משתנה בכל נקודה על גבי הפונקציה שבציור.

נגזרת

באנליזה (חשבון דיפרנציאלי) מחשבים את שיפוע המשיק בעזרת הנגזרת של הפונקציה, בנקודת ההשקה.

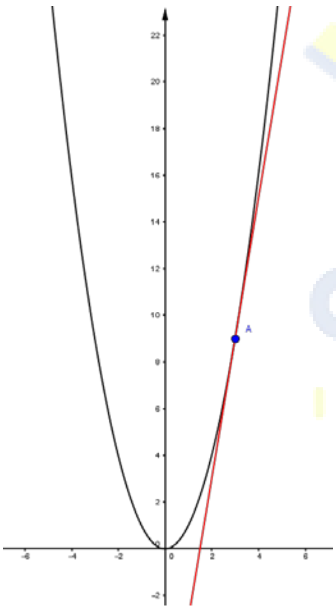
הנגזרת של הפונקציה בנקודת ההשקה = שיפוע המשיק.

m=y'(x=__)

(1)

<u>לדוגמא הפונקציה $y = x^2$ בנקודה A(3,9) העבירו משיק,</u>

<u>איך נמצא את שיפוע המשיק?</u>



נגזור את הפונקציה ונציב את הנקודה.

אנו נרשום את הנתונים בטבלת הנתונים הבאה:

<u>בכל תרגיל:</u>

השלב הראשון הוא שלב הנתונים – נרשום את הנתונים בטבלה.

y=__________

y'=_________

m=_________

x=__________

השלב השני הוא נוסחה והצבה.

m = y' (x=____)

(2)

נתונה הפונקציה $y = 2x^3$ בנקודה x=3 העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

(3)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^3}{3}$ בנקודה x=2 העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

(4)

נתונה הפונקציה $y=2x^2-4x-2$ בנקודה (2,10) העבירו משיק. מצא את שיפוע המשיק.

(5)

נתונה הפונקציה $y=3x^2-2$ בנקודה (3,4) העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

(6)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^3}{3}-2$ בנקודה (2,10) העבירו משיק. מצא את משוואת המשיק.

(7)

נתונה הפונקציה $y=x^2$ בנקודה x=2 העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

(8)

נתונה הפונקציה $y=8-2x^2$. בנקודה A(1,6) העבירו משיק לפרבולה. מצא את משוואת המשיק.

(9)

נתונה הפונקציה $y=3x^2-5x+1$. מעבירים לפונקציה משיק ששיפועו 7. מצא את נקודת ההשקה

(10)

נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2}{2}-x+3$. לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו 1. מצא את נקודת ההשקה.

(11)

ישר משיק לגרף פונקציה $y=x^2+ax+7$ בנקודה x=3. שיפוע הישר הוא 3-. מצא את a.

(12)

נתונה הפונקציה $y=x^2+ax+4$ בנקודה x=1 העבירו משיק ששיפועו 3.

(א) מצא את a.

(ב) מצא נקודה על הפונקציה אשר בה שיפוע המשיק הוא 5.

(13)

נתונה הפונקציה $y=x^2-4x$.

עבור איזה ערך של x, מתאפסת הנגזרת?

(14)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

מצא את הנקודה שעבורה f'(x)=0

(15)

נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 3x$.

עבור איזה ערך של x, הנגזרת שווה ל-1?

(16)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.

עבור איזה ערך של x ערך הנגזרת שווה לאפס.

פונקציות ממשיות זוגיות ואי זוגיות

סימטריה

סימטרייה היא תכונה של צורה.

צורה היא סימטרית, אם אפשר להעתיק אותה על עצמה על ידי **שיקוף**, **הזזה או סיבוב**.

טרנספורמציות איזומטריות (איזומטרית=שוות מידה) הן העתקות של המישור על עצמו השומרות על מרחקים.

בהעתקות אלה המרחקים נשמרים, ולכן כל קטע יועתק תמיד לקטע **השווה** לו **באורכו**.

הפירוש האינטואיטיבי של תכונה זו הוא שהצורות המועתקות **אינן משתנות** (לא ב"צורתן" ולא ב"גודלן").

העתקת שיקוף

השיקוף בישר y הוא העתקה של כל נקודה במישור אל "**תמונת הראי**" שלה ביחס לישר y.

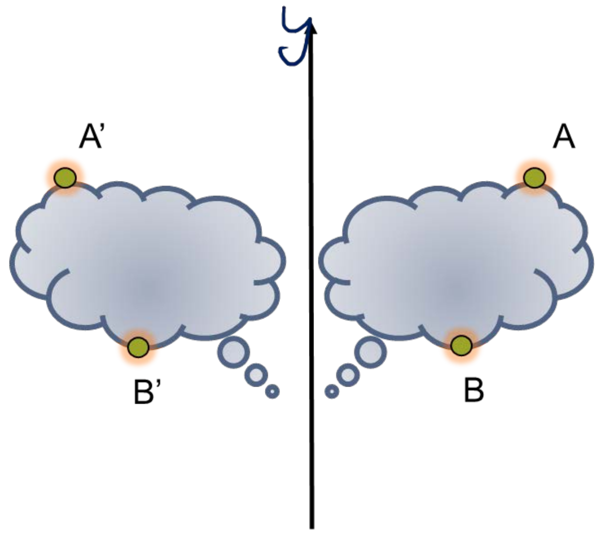
צורות מועתקות אל "**תמונת הראי**" שלהן, שהרי הן מורכבות מנקודות.

כל נקודה מועתקת ל"תמונת הראי" שלה,

למשל: A מועתקת ל–A' ,

B מועתקת ל– B',

ובסך הכול מתקבלת צורת הענן החופפת בדיוק לענן המקורי.



העתקה סיבובית

העתקת הסיבוב מסובבת את כל המישור סביב נקודה מסוימת (הנקראת **נקודת הסיבוב**) בזווית מסוימת (הנקראת **זווית הסיבוב**).

כל הנקודות במישור מסתובבות סביב אותה נקודה ובאותה זווית.

את העתקת הסיבוב מאפיינים אפוא שני נתונים: **נקודת הסיבוב וזווית הסיבוב**.

O – היא **נקודת הסיבוב**

α - היא **זווית הסיבוב**

כל הנקודות של הצורה מסתובבות סביב O בזווית α

העתקת הסיבוב מסובבת את כל המישור סביב נקודה אחת.

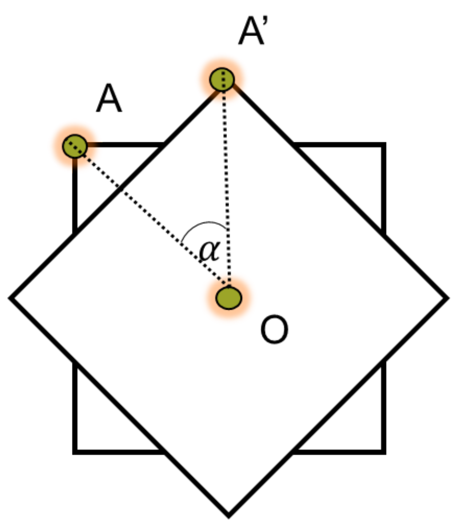
נקודה זו נקראת, כאמור, **נקודת הסיבוב.**

נקודה זו נשארת במקומה במהלך הסיבוב, ולכן היא משמשת **נקודת שֶבֶת** של ההעתקה.

כאשר מסובבים צורה, נקודת הסיבוב יכולה להיות מחוץ לצורה, עליה או בתוכה.

כאשר נקודה A מסתובבת סביב מרכז O ומגיעה אל התמונה A', מידת הסיבוב שלה היא מידת הזווית AOA'.

במתמטיקה נהוג לראות בזווית הסיבוב **זווית בעלת כיוון**. כאשר התנועה היא נגד כיוון מחוגי השעון, זווית הסיבוב מוגדרת זווית חיובית. כאשר התנועה היא עם כיוון השעון, זווית הסיבוב מוגדרת זווית שלילית.



העתקה הזזה

העתקת ההזזה "מסיעה" את כל נקודות המישור בכיוון מסוים ובמידת אורך מסוימת.

כיוון ההזזה ומרחק ההזזה נקבעים לפי **חץ ההזזה**.

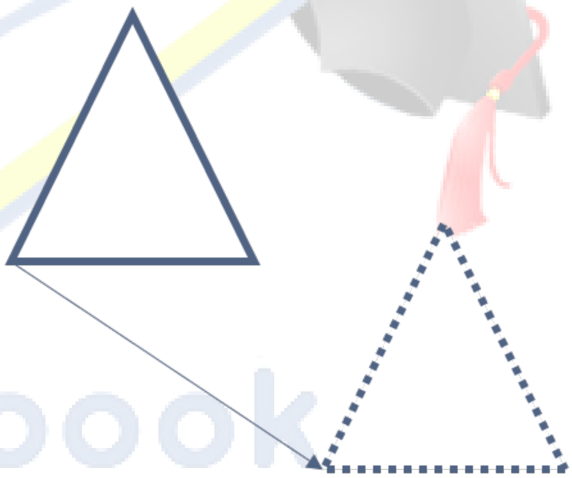
אפשר לתאר את חץ ההזזה כ"**פקודה**" שלפיה מבצעים את ההזזה.

כלומר, ההזזה מעתיקה את כל נקודות המישור כך:

כל הנקודות מועתקות **באותו כיוון** - הכיוון של חץ ההזזה.

כל הנקודות זזות **באותה מידת אורך**,

כלומר, המרחק בין כל נקודה לבין תמונתה (הנקודה המתקבלת ממנה לאחר ההזזה) הוא קבוע **ושווה לאורך החץ הנתון**.



הערות להגדרות השיקוף, הסיבוב וההזזה

- כל ההעתקות האלה הן **העתקות של נקודות**. העתקה של צורה (סיבוב, הזזה או שיקוף שלה) מתקבלת מהעתקת כל הנקודות המרכיבות אותה.
- כל ההעתקות האלה פועלות על כל נקודות המישור. לעתים קרובות אנחנו מתעניינים בהעתקה של צורה מסוימת, אבל יש לזכור שיחד אתה נעות גם כל שאר נקודות המישור, גם אם אינן מסומנות באופן מפורש.
- נזכיר את המרכיבים החשובים של כל אחת מן ההעתקות:

בשיקוף - ישר השיקוף

בהזזה - כיוון ההזזה ומידת ההזזה (או בקיצור: וקטור ההזזה)

בסיבוב - נקודת הסיבוב וזווית הסיבוב.

כל שינוי באחד המרכיבים של העתקה מסוימת יוצר העתקה אחרת, ולכן יש בעצם אינסוף העתקות שיקוף אפשריות, אינסוף העתקות הזזה אפשריות ואינסוף העתקות סיבוב אפשריות.

נקודות שֶׁבֶת הן נקודות הנשארות במקומן בהעתקה.

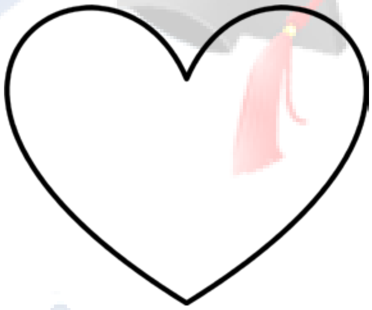
בשיקוף - כל הנקודות על קו השיקוף הן נקודות שבת

בסיבוב (לא זהותי, כלומר שאינו סיבוב ב- 360° או בכפולות של 360°) - רק נקודת הסיבוב היא נקודת שבת.

בהזזה (לא זהותית, כלומר שאינה בחץ שאורכו 0) - אין כלל נקודות שבת.

זוהי צורה בעלת סימטרייה שיקופית,

והיא מתאימה לדימוי של סימטרייה בחיי היומיום.

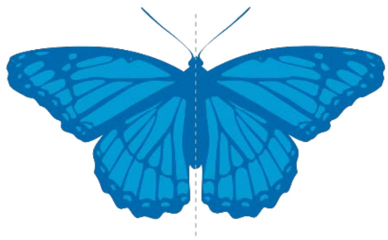


החזית המערבית של קתדרלת נוטרדאם דה ריימס, צרפת,

המחוננת בסימטריית שיקוף ימין-שמאל בעיצובה הכולל

ציור של פרפר עם סימטריה דו צדדית,

הצדדים ימין ושמאל כתמונת מראה אחד של השני

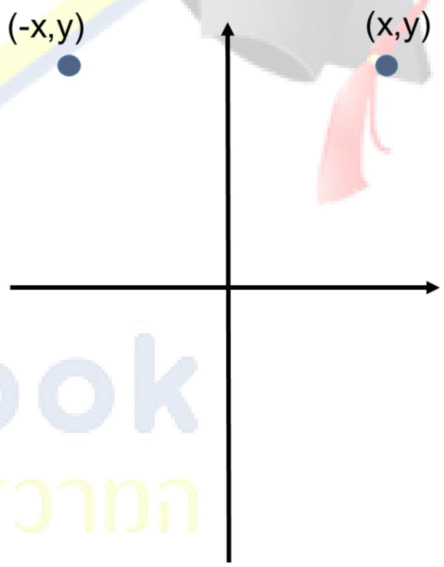


סימטריה

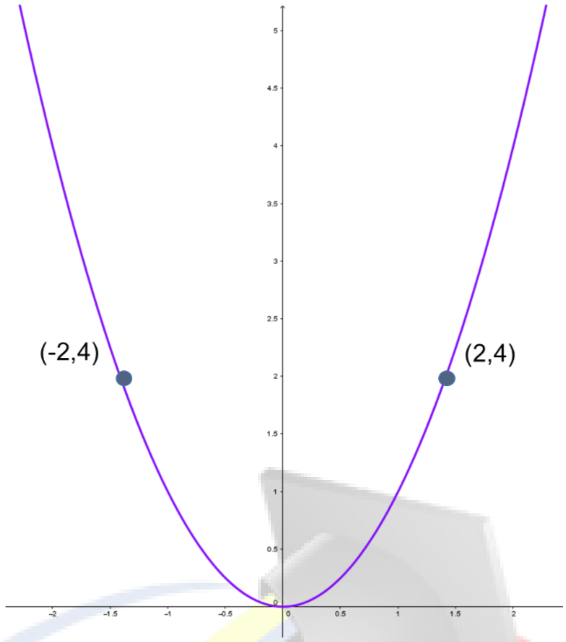
<u>הגדרה: סימטרית ביחס לציר ה-</u><u>y</u>

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה-y** ,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (-x,y) שייכת לה.



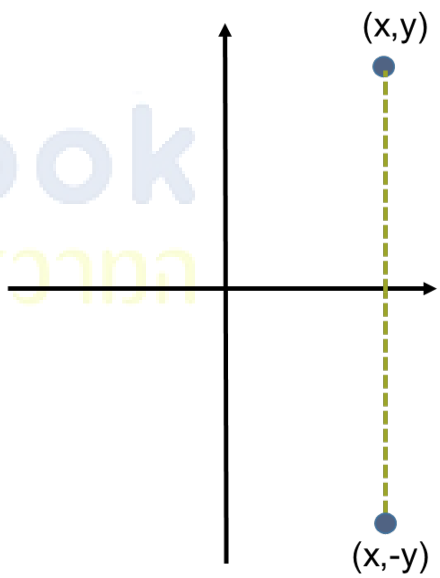
$y = x^2$



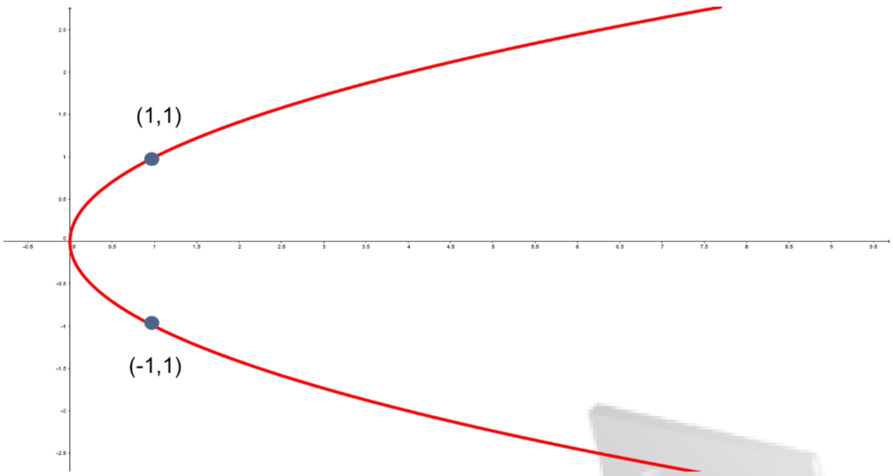
<u>הגדרה: סימטרית ביחס לציר ה-x</u>

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לציר ה-x** ,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (x,-y) שייכת לה.



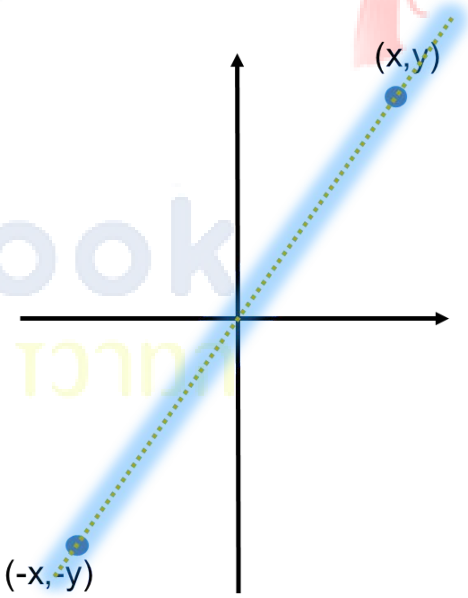
$\underline{y^2 = x}$

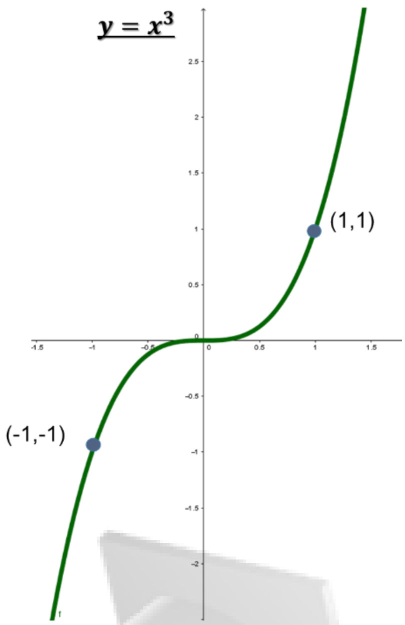


<u>הגדרה: סימטרית ביחס לראשית הצירים</u>

צורה מישורית נקראת **סימטרית ביחס לראשית הצירים**,

אם לכל נקודה (x,y) השייכת לצורה זו, גם הנקודה (-x,-y) שייכת לה.




$y = x^3$
(1,1)
(-1,-1)

פונקציה זוגית

פונקציה f(x) נקראת פונקציה זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: f(-x)=f(x)

פונקציה ממשית $f: D \to F$ נקראת **פונקציה זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של f(x) סימטרי ביחס ל- x=0, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = f(x)$

איך נוכיח את קיום התנאי f(-x)=f(x) ?

כדי להוכיח את קיום התנאי f(-x)=f(x) מציבים בתבנית הפונקציה (–x) במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם f(x).

למשל: כדי להראות שהפונקציה $f(x) = x^2$ היא פונקציה זוגית, נראה כי לכל x ממשי מתקיים:

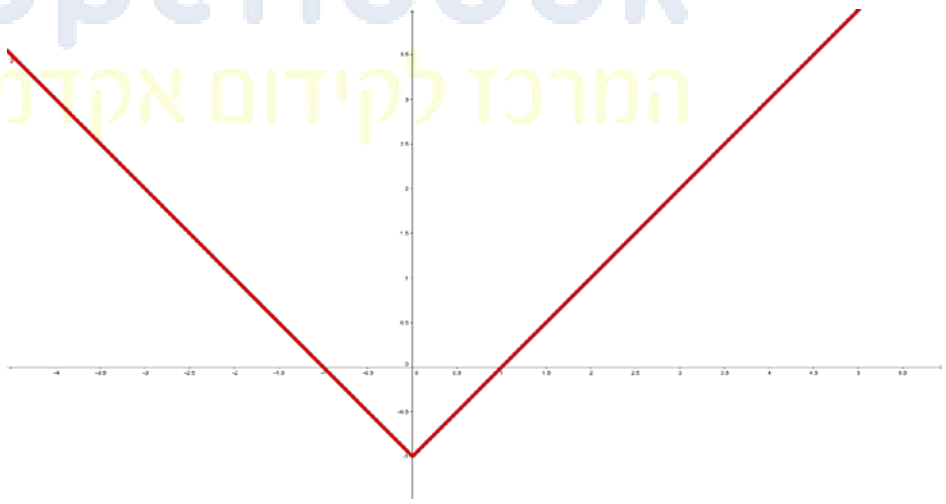
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים שמתאימים להם ערכי y שונים.

למשל כדי להראות שהפונקציה: $f(x) = x^2 + x$ איננה זוגית, די להראות ש-

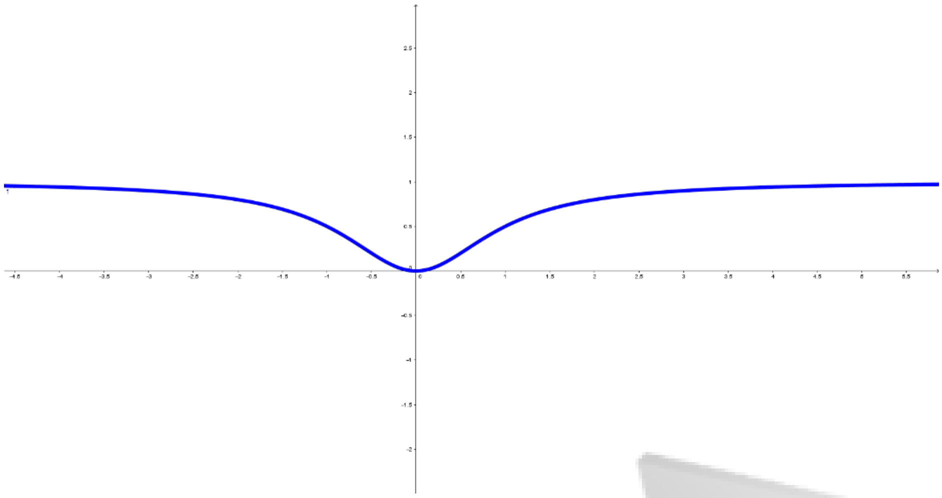
f(-3)=6 ואילו f(3)=12.

$$\boldsymbol{y = |x| - 1}$$



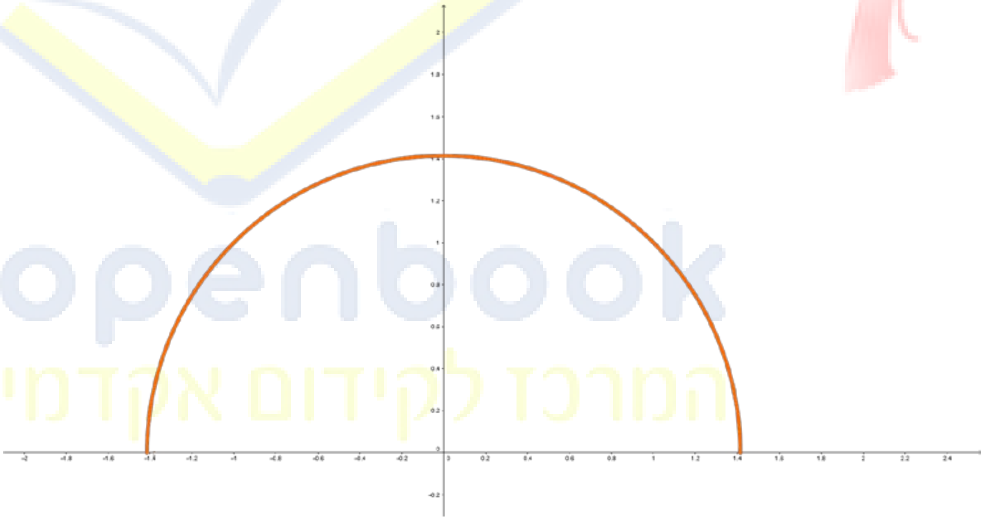
הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{x^2+1}}$$



הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

$$y = \sqrt{2 - x^2}$$



הגרף סימטרי ביחס לציר ה-y.

פונקציה אי זוגית

פונקציה f(x) נקראת פונקציה אי-זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: f(-x)=-f(x)

פונקציה אי זוגית היא פונקציה שהגרף שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים

(אם מסובבים את הגרף ב-180° סביב ראשית הצירים, מתקבל שוב את הגרף המקורי)

פונקציה ממשית $f: D \to F$ נקראת **פונקציה אי-זוגית** אם:

א. תחום ההגדרה של f(x) סימטרי ביחס ל- x=0, כלומר, אם $x \in D$ אז גם $-x \in D$.

ב. לכל $x \in D$ מתקיים: $f(-x) = -f(x)$

איך נוכיח את קיום התנאי f(-x)=-f(x) ?

כדי להוכיח את קיום התנאי f(-x)=-f(x) מציבים בתבנית הפונקציה (x–) במקום המשתנה x ומשווים את התוצאה המתקבלת עם f(x)-.

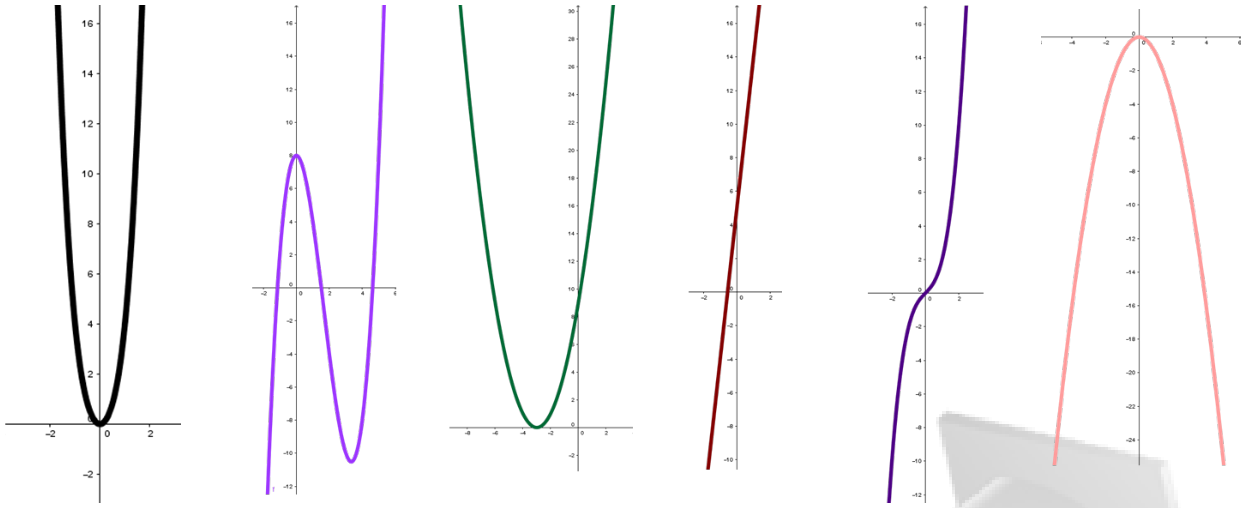
למשל: כדי להראות שהפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}$ היא פונקציה אי-זוגית, נראה כי לכל x ממשי השונה מ-0 מתקיים:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2} + \frac{1}{2\cdot(-x)} = \frac{-x^3}{2} + \frac{1}{-2x} = -\left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x}\right) = -f(x)$$

כדי להראות שפונקציה איננה אי זוגית, די למצוא זוג ערכי x נגדיים אשר ערכי ה-y המתאימים להם אינם מספרים נגדיים.

למשל כדי להראות ש הפונקציה: $f(x) = x^2 + x$ איננה זוגית, די להראות ש- f(-3)=6 ואילו f(3)=12.

קבע עבור כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית או אי זוגית או שהיא לא זוגית ולא אי זוגית.



$y=-x^2$ $\quad$ $y=x^3+x$ $\quad$ $y=9x+5$ $\quad$ $y=(x+3)^2$ $\quad$ $y=x^3-5x^2+8$ $\quad$ $y=x^4+3x^2$

השפעת פעולות חשבון על תכונת זוגיות/ אי זוגיות של פונקציות

הסכום של כל שתי פונקציות זוגיות הוא פונקציה זוגית.

המכפלה של כל שתי פונקציות אי זוגיות היא פונקציה זוגית.

השוואה בין פונקציה זוגית לאי זוגית

כדי לשרטט גרף של פונקציה זוגית או אי זוגית, מספיק למצוא את הקיצון ונקודות החיתוך בתחום ש: $x \geq 0$.

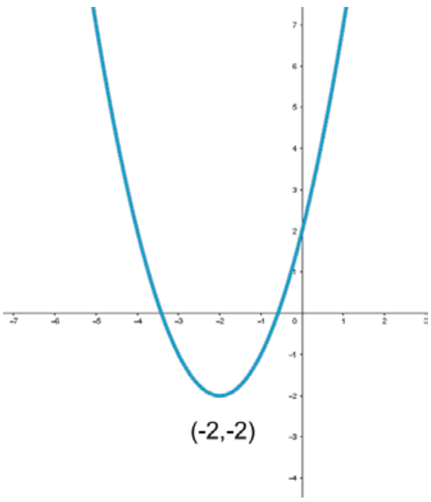
אנו יכולים להסיק לפי התכונה של זוגיות / אי זוגיות איך הפונקציה מתנהגת בצידו האחר של ציר ה-y (כאשר $x \leq 0$)

נסכם את הדומה והשונה בין פונקציה זוגית לאי-זוגית

הקשר בין גרף הפונקציה לנגזרתה

תרגיל (1)

איך נשרטט סקיצה של ‘ f ?



מה אנחנו יכולים להסיק מהסתכלות על גרף f על גרף ‘ f ?

נקודות הקיצון של f הן נקודות האפס של ‘ f

תחומי הירידה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת שלילית

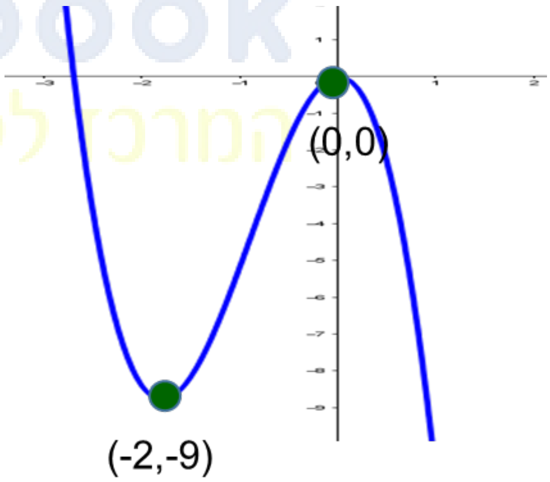
ולכן הם תחומי השליליות של ‘ f

תחומי העליה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת חיובית

ולכן הם תחומי החיוביות של ‘ f

תרגיל (2)

שרטט סקיצה של 'f ושל "f.



תרגיל (3)

שרטט סקיצה של 'f של הפונקציה $y = 2x^2 - 8x + 6$

תרגיל (4)

שרטט סקיצה של f' של הפונקציה $y = x^3 - 3x$

תרגיל (5)

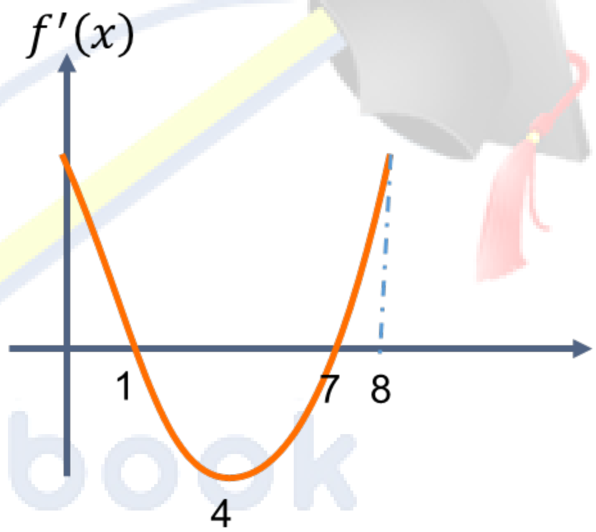
הפונקציה f(x) מוגדרת בתחום $0 \le x \le 8$. בציור מתואר גרף הנגזרת f'(x).

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x).

ב. מצא את שיעור ה-x בנקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון גם: f(0)=-2 , f(4)=0 , f(8)>0.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x).



תרגיל (6)

לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- x=1. f'(x) היא הנגזרת של f(x).

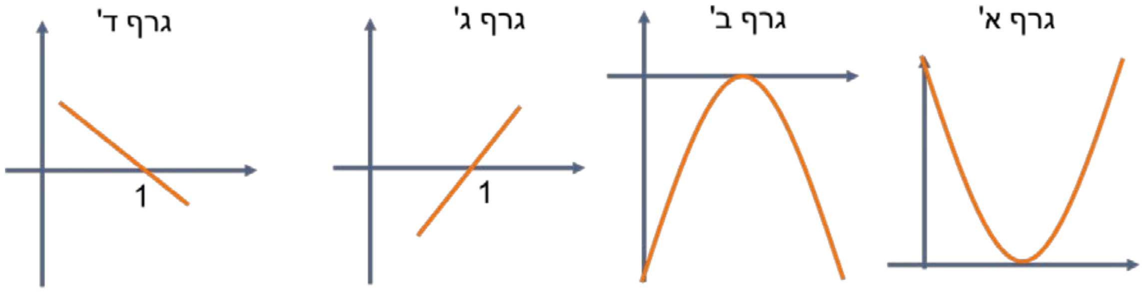
א. מהו שיעור ה-x של הנקודה בה הנגזרת f'(x) שווה לאפס?

ב. מהי הנקודה שבה חותך גרף הנגזרת f'(x) את ציר ה-x?

ג. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f'(x) עבור x>1?

ד. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f'(x) עבור x<1?

ה. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f'(x)?



תרגיל (7)

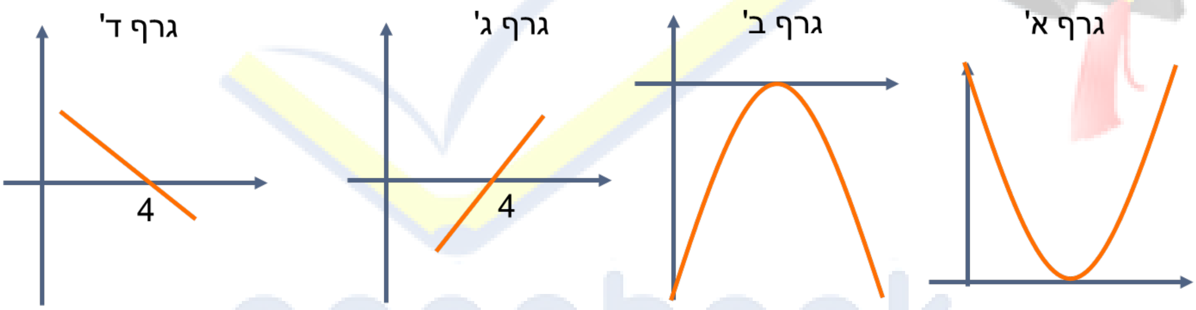
לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מקסימום ב- x=4.

f'(x) היא הנגזרת של f(x).

א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f'(x) עבור x>4?

ב. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת f'(x) עבור x<4?

ג. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f'(x)?

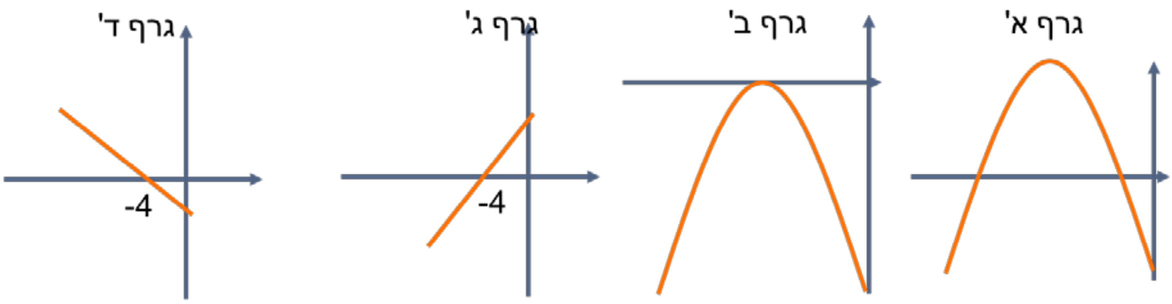


תרגיל (8)

לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- x=-4.

f'(x) היא הנגזרת של f(x).

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f'(x)?



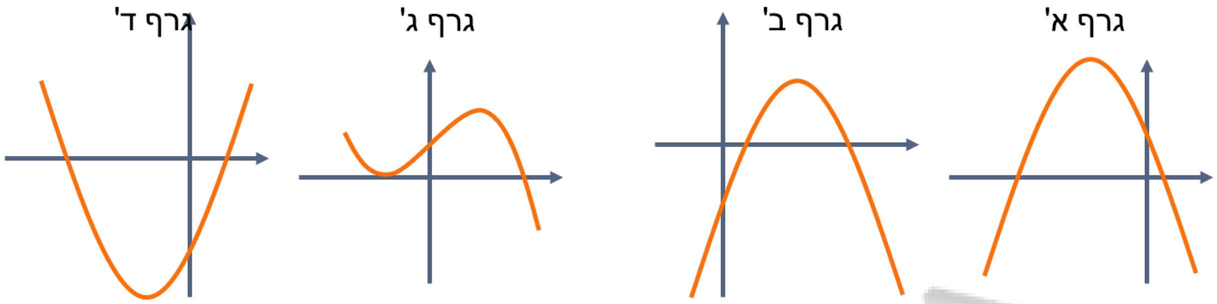
תרגיל (9)

לפונקציה f(x) יש שתי נקודות קיצון בלבד.

נקודת מקסימום ב- x=2 ונקודת מינימום ב- x=-4.

f’(x) היא הנגזרת של f(x).

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת f’(x)?



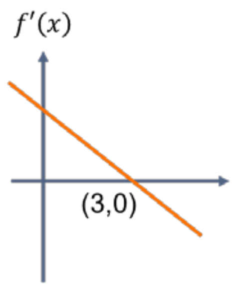
<u>תרגיל (10)</u>

בציור מתואר גרף הנגזרת f’(x) של פונקציה f(x).

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x).

ב. מצא את שיעור ה-x בנקודת הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון: f(3)=2. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x).

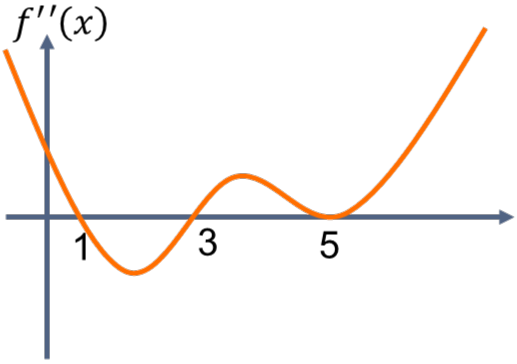


<u>תרגיל (11)</u>

נתונה הפונקציה f(x). בציור מתואר גרף הנגזרת השנייה f’’(x).

א. מצא את שיעור ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה f(x).

ב. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה f(x).


$f''(x)$
1
3
5

חקירת פונקציה

תחום הגדרה

תחום ההגדרה של שבר
הוא שהמכנה שלו שונה מאפס

$y=\frac{1}{x} \quad x\neq 0$

$y=\frac{1}{x-4} \quad x-4\neq 0$
$x\neq 4$

שורש ריבועי לא מוגדר
עבור מספרים שליליים

$y=\sqrt{x} \quad x\geq 0$

$y=\sqrt{x-2} \quad x-2\geq 0$
$x\geq 2$

נקודת קיצון נקודות מקסימום מקומי

בנקודות המינימום והמקסימום הנגזרת של הפונקציה שווה לאפס.

לכן, אם נרצה למצוא את שיעור ה-x של נקודות הקיצון (min/max) נמצא את הנגזרת ונשווה את הנגזרת לאפס.

אז מצאנו נקודת קיצון, איך נקבע את סוג הקיצון (min/max) ?

לשם כך ניתן להיעזר באחת משתי השיטות:

(1) באמצעות טבלה

(2) באמצעות נגזרת שנייה (קיימים מקרים שלא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה !!)

קביעת נקודת קיצון באמצעות טבלה

	נקודה קטנה מהנק' החשודה	שיעור x של נק' קיצון	נקודה גדולה מהנק' החשודה
נציב את שיעור x בנגזרת y'			
אם y'>0 נצייר חץ עולה אם y'<0 נצייר חץ יורד			

קביעת נקודת קיצון באמצעות נגזרת שנייה

שימו לב !! קיימים מקרים בהם לא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה ולכן מומלץ לקבוע באמצעות טבלה !

נגזור שוב את הפונקציה ונציב את שיעור ה-x של נקודת הקיצון.

אם $y''>0$ אז זאת נקודת מינימום

אם $y''<0$ אז זאת נקודת מקסימום

תחומי עלייה וירידה

נראה באמצעות הטבלה מתי יש עלייה ומתי יש ירידה

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר y.

הנקודה $A(\ , \ )$ "יושבת" על ציר y.

נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר x.

הנקודה $B(\ , \ )$ "יושבת" על ציר x.

שרטוט סקיצה

נסמן במערכת הצירים את נקודות החיתוך עם הצירים ,

את נקודות הקיצון שמצאנו (מינימום ומקסימום)

ניצור כובעים לפי נקודת סיווג נקודות הקיצון (אם מינימום: ∪ מקסימום: ∩)

נחבר בין הנקודות ונקבל את הסקיצה של גרף הפונקציה

תרגילים חקירת פונקציית פולינום

(17)

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-6x^2+9x$

א. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה חותך את ציר ה-y בנקודה B.

מצא את השיעורים של הנקודה B.

תרגילים חקירת פונקציה רציונלית

פונקציה רציונלית היא פונקציה שניתן לכתוב אותה כמנה של שתי פונקציות פולינום

(18)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}$.

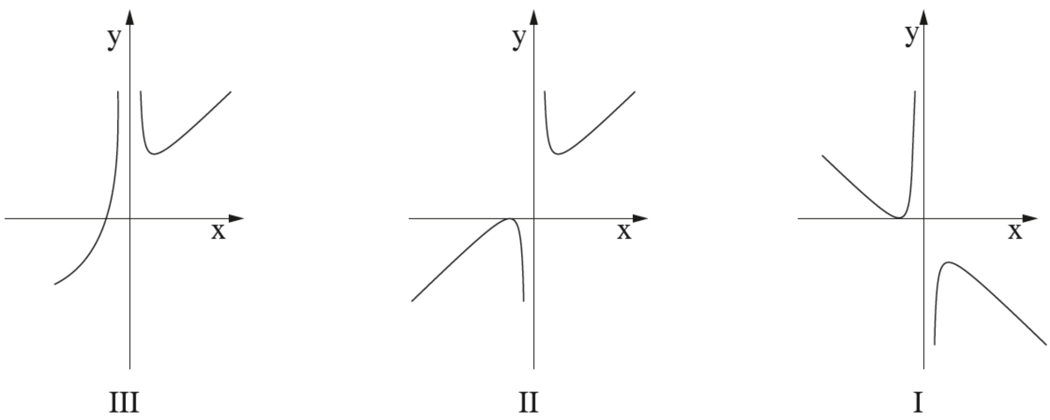
א. רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה־ x .

ה. קבע איזה מבין הגרפים I-III שלפניך הוא גרף הפונקציה f(x) . נמק את קביעתך.



(19)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

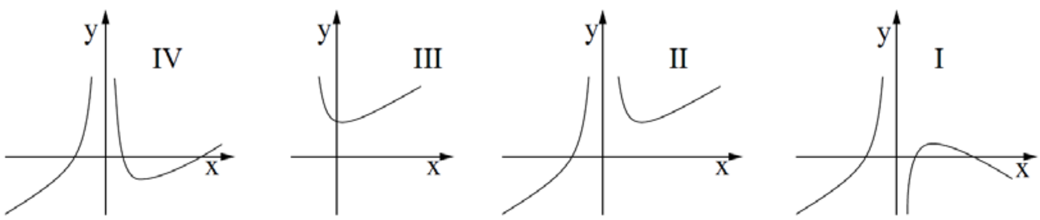
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



תרגילים חקירת פונקציה אי רציונלית

(1)

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 8\sqrt{x}$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה. נמק.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק את תשובתך.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-y.

ה. קבע איזה מן הגרפים $I - IV$ שלפניך הוא גרף של הפונקציה f(x)

(2)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־ y .

ה. נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה־ x בנקודה $(2.52\ ,0)$.

היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3)

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$.

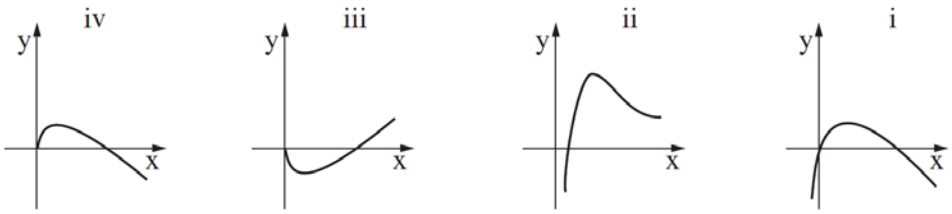
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את x שעבורו $f'(x) = 0$.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.

ה. איזה מהגרפים i-iv שלפניך הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



פונקציה טריגונומטרית

נגזרת של פונקציות טריגונומטריות

נגזרת של פונקציית סינוס

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\big(\sin(f(x))\big)' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $(x^3 + 6\sin x)'$

(2) $(x^2 + 3\sin x)'$

(3) $(x\sin x)'$

(4) $(3x\sin x)'$

(5) $(\sin 4x)'$

(6) $(\sin 3x)'$

נגזרת של פונקציית קוסינוס

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\big(\cos(f(x))\big)' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

(7) $(2x^4 - 6\cos x)'$

(8) $(\cos 2x)'$

(9) $(2\cos 8x)'$

(10) $\left(\frac{x}{\cos x}\right)'$

(11) $\left(\frac{\cos 4x}{x}\right)'$

(12) $(\cos^3 x)'$

נגזרת של פונקציית טנגנס

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\tan\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(f(x)\right)} \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

(13) $(8\tan x)'$

(14) $(2x - 5\tan x)'$

(15) $(\tan 5x)'$

(16) $(x\tan 2x)'$

(17) $(\tan^4 x)'$

(18) $(\tan^3 2x + \tan(2x^3))'$

נגזרת של פונקציות טריגונומטריות

גזור את הפונקציות הבאות:

(19) $(x + \sin^2 x + \cos x)'$

(20) $\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)'$

(21) $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'$

(22) $(\sin^2 2x - \cos^2 2x)'$

פתרונות – פונקציות טריגונומטריות

(1) $3x^2 + 6\cos x$ (2) $2x + 3\cos x$ (3) $\sin x + x\cos x$ (4) $3\sin x + 3x\cos x$ (5) $4\cos 4x$ (6) $3\cos 3x$ (7) $8x^3 + 6\sin x$ (8) $-2\sin 2x$ (9) $-16\sin 8x$ (10) $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$ (11) $\frac{-4x\sin 4x - \cos 4x}{x^2}$ (12) $-3\sin x \cdot \cos^2 x$ (13) $\frac{8}{\cos^2 x}$ (14) $2 - \frac{5}{\cos^2 x}$ (15) $\frac{5}{\cos^2 5x}$ (16) $\tan 2x + \frac{2x}{\cos^2 2x}$ (17) $\frac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}$ (18) $\frac{6\tan^2 2x}{\cos^2 2x} + \frac{6x^2}{\cos^2 2x^3}$

(19) $1 + \sin 2x - \sin x$ (20) $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ (21) $\frac{1}{1+\cos x}$ (22) $4\sin 4x$

ערך הנגזרת, שיפוע המשיק בפונקציות טריגונומטריות

(23)

נתונה הפונקציה y=2sinx

לאילו ערכים של x בתחום $0 \le x \le 2\pi$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 1?

(24)

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה y=xsinx

בנקודה $x = 2\pi$.

(25)

לאילו ערכי x המשיק לגרף הפונקציה $y = -\frac{\cos 3x}{3}$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

יוצר זווית בת $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x?

(26)

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה y=1-2sin2x בנקודה x=0.

(27)

הנגזרת של הפונקציה y היא $y' = 2\cos 2x + \cos x$.

מצא את משוואת המשיק לפונקציה y ששיפועו $-\frac{1}{2}$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ששיעור ה-y של נקודת ההשקה הוא $\sqrt{3}$.

(28)

נתונה הפונקציה $f(x) = x + \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$ ונתון הישרים: y=x+1 , y=x-1.

1. מצא את הנקודות המשותפות בתחום
2. הראה שהישרים משיקים לפונקציה בנקודת החיתוך שמצאת
3. מצא את כל הנקודות ההשקה של גרף הפונקציה, לא רק בתחום הנ"ל (פתרון כללי עם k)

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות טריגונומטריות

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של כל אחת מהפונקציות הבאות בתחום הנתון

(29)

$y=\sin x$ בתחום $0\le x\le \pi$

(30)

$y=\sin 2x+x$ בתחום $0\le x\le \pi$

נקודות קיצון בקצה התחום – פונקציות טריגונומטריות

(31)

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות ובקצות התחום וקבע את סוג הקיצון: $y=x+2\cos x$ בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

אסימפטוטות אנכיות – פונקציות טריגונומטריות

(32)

מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה: $y=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ בתחום $0\le x\le \pi$

(33)

מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה: $y=\frac{\sin x}{4\sin x-4}$ בתחום $0\le x\le \pi$

חקירה של פונקציות טריגונומטריות

(1)

נתונה הפונקציה $\mathrm{y}=8\sin^2\mathrm{x}-\cos 4\mathrm{x}$ בתחום $0<x<\frac{4}{5}\pi$

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה, ($\cup$) ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה ($\cap$)בתחום הנתון.

ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה f(x)=0 בתחום הנתון. נמק.

(2)

נתונה הפונקציה $\mathrm{y}=\frac{\sin x-1}{\sin x}$ בתחום $0<x<\pi$

א. בתחום הנתון מצא את: (1) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר.y

(2)נקודות החיתוך של הפונקציה עם צירx

(3)נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

תרגילים מסכמים

(1)

לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x-a}}{cx^2}$ יש קיצון בנקודה $\left(8;\ \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$.

א. חשב את a ואת c.

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה

(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2)

חקור את הפונקציה הבאה: $y=\left(\frac{2x+5}{x+2}\right)^3$

(3)

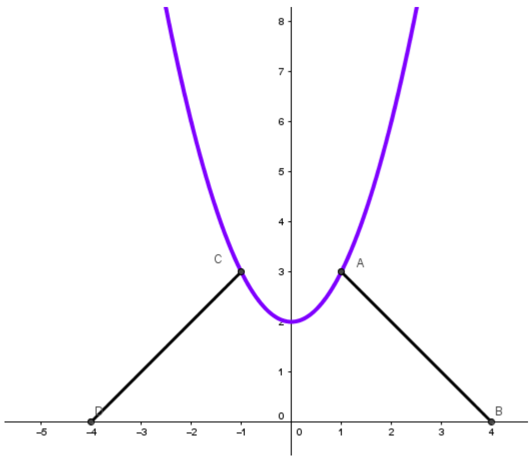
מצא נקודות פיתול לפונקציה: $y=x\sqrt{x-3}$

(4)

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות :

$$y=x^2+2 \quad , \quad y=-x+4 \quad , \quad y=x+4$$

חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות ועל ידי ציר ה-x.



(5)

חקור את הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{4 - x^2}$

<u>קיץ מועד ג 2014 שאלה 7</u>

(6)

בציור שלפניך מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{12x^3 - x^5}}{x}$, שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \leq -2\sqrt{3}$, $0 < x \leq 2\sqrt{3}$.

א. הישר y=k חותך את גרף הפונקציה f(x) בשתי נקודות בדיוק.

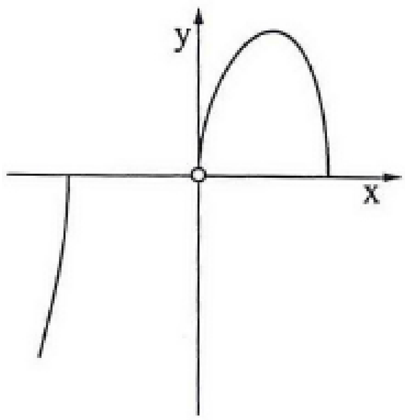
מצא את תחום הערכים של k.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{12x - x^3}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $0 < x \leq 2\sqrt{3}$, $x \leq -2\sqrt{3}$.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה g(x).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה g(x).

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א', מצא בכמה נקודות חותך הישר y=k את גרף הפונקציה g(x).



בגרות קיץ מועד ד' 2014

(7)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sin x} - a\sin x$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$, a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. רשום את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה-x.

ג. הוכח שהפונקציה היא אי-זוגית

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה,וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפוקנציה.

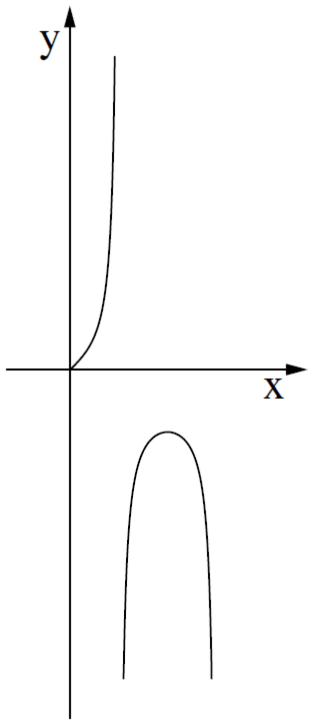
ו. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ בתחום $0 < x < \pi$.

היעזר בסעיפים הקודמים והראה שהפונקציה g(x) היא אי-שלילית.

(8)

קיץ מועד א 2015 שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ (ראה ציור)



ענה על הסעיפים א, ב ו־ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x).

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה f(x).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה f(x), וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת f’(x).

ג. נתונה הפונקציה g(x) המקיימת g(x)=2f(x) f’(x).

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה g(x), על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{6}$.

(9)

קיץ מועד א 2015 שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה f(x) יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה f(x), ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפוקנציה f(x) ועל ידי הצירים, גדול מ-4, קטן מ-4 או שווה ל-4? נמק.

פונקציה מעריכית

נגזרת של פונקציות מעריכיות

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

תרגיל

גזור את הפונקציות הבאות:

1) $y = 4e^x$
2) $y = x^4 e^x$
3) $y = 4e^x + 1$
4) $y = e^{3x^2 - x}$
5) $y = 3^x$
6) $y = 3^{4x+1}$

תחום הגדרה של פונקציה מעריכית

הפונקציה $y = e^x$ מוגדרת לכל x.

תרגיל

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \frac{1}{e^{2x} - 4e^x}$

תרגיל

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

תרגיל

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \frac{e^x - 3}{e^{2x} + 1}$

אסימפטוטות מקבילות לצירים

אסימפטוטה אנכית

אין הבדל בין הדרך שבה עסקנו עד כה

גם כאן נשווה את המכנה לאפס ונבדוק אילו מהפתרונות לא מאפסים גם את המונה.

לפונקציות $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$ אין אסימפטוטות אנכיות

אסימפטוטה אופקית

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = e^x$

עבור ערכי x שליליים השואפים **למינוס אינסוף**

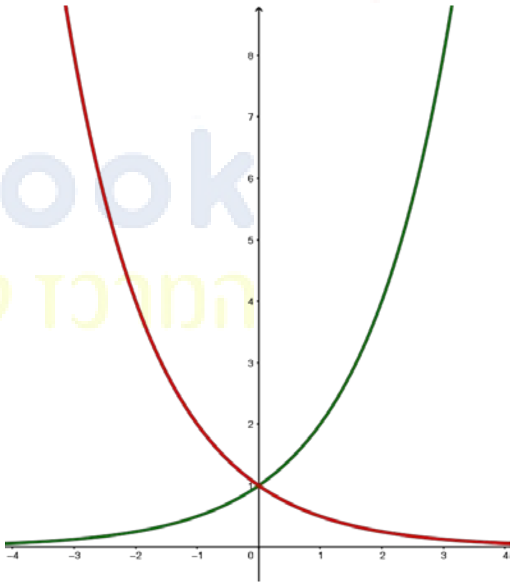
ערך הפונקציה שואף לאפס,

לכן האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x) = e^x$ הוא הישר y=0.

כאשר x שואף **לפלוס אינסוף**

ערך הפונקציה $f(x) = e^x$ שואף לפלוס אינסוף,

ולכן אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית.



נדון במקרים פשוטים

נצטרך לחלק מונה ומכנה בחזקה הגבוהה של e^x

הישר y=0 הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x) = e^x$ כאשר $x \to -\infty$

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

תרגיל

מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $y = e^{3x} + 3$

תרגיל

מצא את האסימפטוטות האנכית והאופקית של הפונקציה $y = \frac{1}{e^x - 2}$

תרגיל

מצא את האסימפטוטות האנכית והאופקית של הפונקציה $y = \frac{e^{2x} - 6e^x + 12}{2e^{2x} - 4}$

תחומי קעירות ונקודת פיתול

תרגיל

מצא את נקודת הפיתול ותחומי קעירות כלפי מטה ומעלה של הפונקציה

$$f(x) = (x^2 - 14)e^{-x}$$

תרגילים מבגרויות

בגרות קיץ 2008

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x} + 4e^x + 3}{(e^x - 3)^2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).נמק.

ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.נמק.

ה. על פי תשובותיך לסעיפים א-ד, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

בגרות קיץ 2009

נתונה הפונקציה $f(x) = x\,e^{x^2}$

א. מצא את תחום העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).נמק.

ב. מצא את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה וכלפי מטה..

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה

ד-ה אינטגרלי

בגרות קיץ 2011

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה

ד. ישר שמשוואתו $y=2.5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות.

מבין שתי הנקודות האלה, מצא את השיעורים של הנקודה שבה הפונקציה יורדת. נמק.

פונקציה לוגריתמית

הפונקציה הלוגריתמית:

$$f(x) = \log_a x$$

מוגדרת כפונקציה ההפוכה ל- $g(x) = a^x$

כאשר $a \neq 1\ ,\ a > 0$

הלוגריתם של המספר x לפי הבסיס a הוא המעריך של החזקה שבה צריך להעלות את הבסיס a כדי לקבל את המספר x.

תזכורת – הגרפים של פונקציה ופונקציה הפוכה לה סימטריים זה לזה ביחס לישר y=x, לכן נוכל להסיק את התיאור הגרפי של הפונקציה הלוגריתמיות $f(x) = \log_a x$ עבור ערכים שונים של בסיס a.

באופן כללי

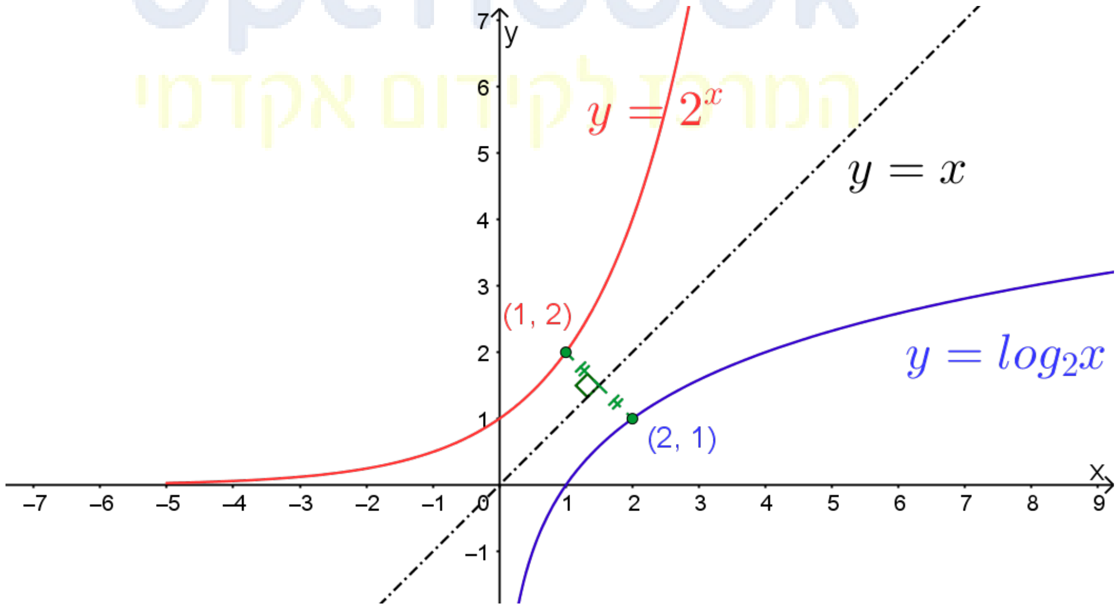
הפונקציה המעריכית $\mathrm{y} = a^x$

והפונקציה הלוגריתמית $\mathrm{y} = \log_a x$

הפוכות זו לזו

והגרפים של שתי הפונקציות הללו

סימטריים ביחס לישר y=x



תכונות הפונקציה הלוגריתמית

הגרף עובר בנקודה (1,0)

הישר x=0 הוא אסימפטוטה אנכית

תחום ההגדרה הוא: x>0

אם a>1, אז הפונקציה עולה בכל התחום x>0

אם 0<a<1, אז הפונקציה יורדת בכל התחום x>0.

תחום הגדרה פונקציה לוגריתמית

הפונקציה $y = \ln x$ מוגדרת לכל x>0 .

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$

הפונקציה מוגדרת בתנאי שהביטוי שבתוך הln הוא חיובי, כלומר כאשר:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

זהו אי שוויון ריבועי שהפתרון שלו:

$x > 3$ או $x < 1$

תרגיל

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \frac{\ln(x^2)}{\ln x - 1}$

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \ln x$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln x$

לפי הגדרת הלוגריתם (חזקת e):

$$e^{f(x)} = e^{\ln x}$$

$$e^{f(x)} = x$$

נגזור את שני האגפים לפי x כאשר בגזירה באגף שמאל ניעזר בנגזרת של פונקציה מורכבת.

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

נשים לב שאנחנו יודעים ש:

$$e^{f(x)} = x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \log_a x$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \log_a x$ כאשר $a > 0$, $a \neq 1$

נעזר בנוסחה לשינוי בסיס הלוג כדי לרשום ביטוי לפי בסיס e.

$$f(x) = \log_a x \ = \frac{\log_e x}{\log_e a} \ = \frac{\ln x}{\ln a}$$

כעת נגזור את הביטוי שהתקבל ונשים לב ש $\ln a$ הוא קבוע

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \ = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} \ = \frac{1}{x \ln a}$$

גזור את הפונקציות הבאות

$$y = 4\ln x$$

$$y = x^4 \ln x$$

$$y = \ln(10 - 3x)$$

$$y = \log_6 x$$

$$y = x + \log_5 x$$

$$y = \log_5(6x - 1)$$

$$y = \log_2 x + \log_8 x^2$$

אסימפטוטות

הפונקציה $y = \ln x$ מוגדרת לכל x>0 .

הישר x=0 (ציר ה-y) הוא אסימפוטה אנכית של הפונקציה y=lnx.

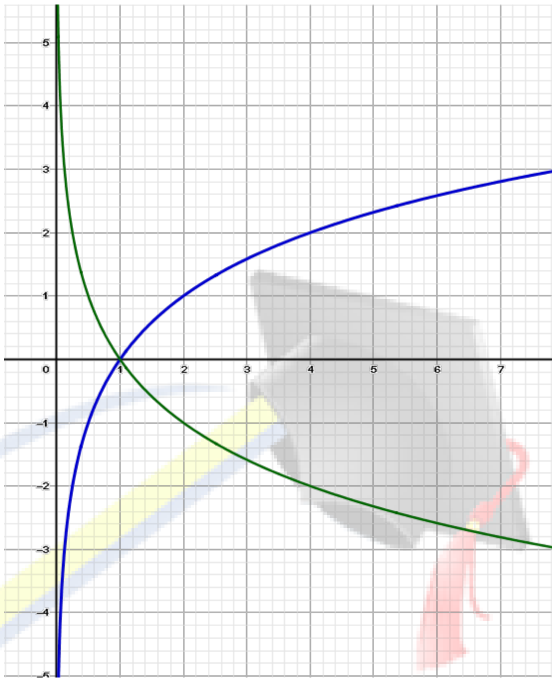
כאשר הפונקציה מהצורה $y = \ln\big(f(x)\big)$ האסימפטוטה האנכית מתקבלת כאשר f(x)=0

הישר f(x)=0 הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $y = \log_a f(x)$ כאשר $a > 0$, $a \neq 1$

הישר x=0 (ציר ה-y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $y = \log_a x$ כאשר $a > 0$, $a \neq 1$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$



תרגיל

מצא את האסימפטוטה אנכית של הפונקציה $y = \ln(x^2 - 8x + 12)$

אופקית

נזכור שכאשר $x \to \infty$ הפונקציה f(x)=lnx שואפת גם היא ל ∞ ולכן לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.

לפונקציות y=lnx ו- $y = \log_a x$ אין אסימפטוטה אופקית.

עם זאת, כשפונקציות אלה הן חלק ממכפלה או מנה של פונקציות תיתכן אסימפטוטה אופקית.

ניתן למצוא בשתי דרכים:

(1) בעזרת הצבות.

(2) בהסתמך על כך שכש X שואף לאינסוף, lnx שואף לאינסוף וכאשר x שואף לאפס, lnx שואף למינוס אינסוף.

תרגיל

מצא את האסימפטוטה המאונכות לצירים של הפונקציה $y=\frac{3}{\ln x}$

תרגיל

מצא את אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $y=\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x)^2-1}$

תרגיל

מצא את האסימפטוטה המאונכות לצירים של הפונקציה $y=\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x)^2-\ln x-2}$

לסיכום

נבדוק את התנהגות הגרף כאשר ערכי ה-x הולכים ומתקרבים לנקודת אי ההגדרה.

יתכנו שני מצבים ככל שגרף הפונקציה מתקרב לנקודת אי הגדרה:

(1) כאשר ערכי הפונקציה שואפים ל $\pm\infty$ מדובר באסימפטוטה אנכית.

(2) כאשר גרף הפונקציה שואף לערך סופי וקבוע (y=0 , y=4) – הרי מדובר בנקודת אי רציפות סליקה – "חור" בגרף הפונקציה.

כדי לדעת בוודאות איזה מהמצבים מתקיים נבדוק האם גרף הפונקציה שואף ל: $\pm\infty$ אז זאת אסימ' אופקית ואם הוא מקבל ערך סופי – שואף למספר קבוע נדע שיש נקודת אי רציות לסיקה ואת שיעוריה.

נקודת פיתול פונקציה לוגריתמית

קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה

ונקודת פיתול

נתונה פונקציה f(x) ונתונה נקודה x_1 שבה יש לפונקציה משיק.

פונקציה קעורה כלפי **מעלה** – אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 עבורה גרף הפונקציה נמצא **מעל** למשיק בנקודה x_1 אז הפונקציה f(x) קעורה כלפי **מעלה** בנקודה הנ"ל.

פונקציה קעורה כלפי **מטה** – אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 עבורה גרף הפונקציה נמצא **מתחת** למשיק בנקודה x_1 אז הפונקציה f(x) קעורה כלפי **מטה** בנקודה הנ"ל.

נקודת **פיתול** – אם בנקודה x_1 המשיק לגרף הפונקציה עובר מצד אחד של גרף הפונקציה לצד השני אז הנקודה x_1 נקראת **נקודת פיתול**. מעבר מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה או להיפך.

נניח שנתונה פונקציה f(x) המוגדרת בסביבת הנקודה x_1 וידוע כי בנקודה x_1 קיימת לפונקציה נגזרת שנייה $f''(x_1)$:

(1) אם $f''(x_1) > 0$, אז הפונקציה **קעורה כלפי מעלה** ∪ בנקודה x_1.

אם בנקודה x_1 הנגזרת השנייה חיובית, אז הפונקציה **קעורה כלפי מעלה** ∪ בנקודה זו.

(2) אם $f''(x_1) < 0$, אז הפונקציה **קעורה כלפי מטה** ∩ בנקודה x_1.

אם בנקודה x_1 הנגזרת השנייה שלילית, אז הפונקציה **קעורה כלפי מטה** ∩ בנקודה זו.

נקודת **פיתול** – אם בנקודה x_1 המשיק לגרף הפונקציה עובר מצד אחד של גרף הפונקציה לצד השני אז הנקודה x_1 נקראת **נקודת פיתול**. מעבר מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה או להיפך.

שלבים למציאת פיתול:

(1) מוצאים נגזרת שנייה f''(x)

(2) משווים לאפס את הנגזרת השנייה. מתקבלים שיעורי x ים חדושים כפיתול.

(3) יוצרים טבלה עם שורות x, f''(x), f(x) ובודקים ערכים לפני ואחרי הנקודה.

(4) מעבר מקעירות כלפי מטה , למעלה ולהפך זה נקודת פיתול.

תרגיל

מצא את נקודת הפיתול ותחומי קעירות כלפי מטה ומעלה של הפונקציה

$$f(x) = x^2 + 8\ln(-x)$$

תרגילים מבגרויות

בגרות חורף 2006

נתונה הפונקציה $f(x) = axln\,(x-2)\,,\;\; a \neq 0$

השיפוע של הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $2 + \ln 2$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. מצא באיזה תחום הפונקציה קעורה כלפי מעלה ובאיזה תחום היא קעורה כלפי מטה

ה. נתון כי $f'(x) \neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

<u>בגרות חורף 2008</u>

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + a \log_{\frac{1}{2}}(6-x)$, a - פרמטר

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה x=4,

חותך את ציר x בנקודה שבה $x = 4 + 12\ln 2$

מצא את ערך הפרמטר a.

<u>בגרות קיץ 2013 א'</u>

נתונה פונקצית הנגזרת $f'(x) = \frac{2\ln x(2-\ln x)}{x(1-\ln x)^2}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של f'(x).

(2) אחת משתי האסימפטוטות האנכיות של f'(x) היא x=0.

מצא את האסימפטוטה האנכית השנייה

(3) מצא את נקודת החיתוך של הגרף של f'(x) עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את התחומים שבהם f'(x) שלילית, ואת התחומים שבהם היא חיובית.

ב. ידוע כי לפונקצית הנגזרת f'(x) יש גם אסימפטוטה אופקית y=0.

סרטט סקיצה של הגרף של פונקצית הנגזרת f'(x).

ג. הישר y=-4 משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה שבה x>e.

(1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה. נמק.

(2) הסבר מדוע $f(e^3) < -4$.

(3) השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקצית הנגזרת f'(x) ועל ידי ציר x בתחום $e^2 \le x \le e^3$ שווה ליחידה ריבועית אחת. מצא את הערך של $f(e^3)$