


תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **חשבון דיפרנציאלי**, המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל service@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

חשבון דיפרנציאלי

שיפוע של גרף פונקציה

שיפוע של פונקציה קווית

מהו השיפוע של שולחן הכתיבה שלכם?

אם היה לו שיפוע, והייתם מניחים עט/עפרון על השולחן, האם העט/עפרון נשאר על השולחן?
השולחן שלכם (לרוב) בעל שיפוע 0.

אם תרימו את השולחן מצדו הימני, השיפוע הוא חיובי.

אם תרימו את השולחן מצדו השמאלי השיפוע הוא שלילי.

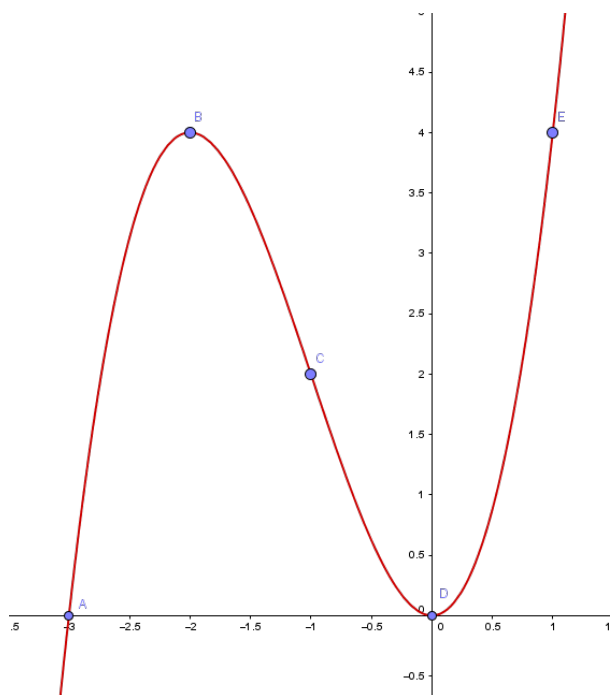
משוואת הקו הישר $y=mx+b$

b - היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

m - השיפוע של הישר.

שיפוע של פונקציה לא קווית

קבעו אם השיפוע בנקודות המסומנות חיובי, שלילי, או אפס



סיכום

מה שמאפיין פונקציה קווית הוא שיפוע קבוע.

פונקציה שאינה קווית השיפועים שונים בנקודות שונות

משיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודת ההשקה.

שיפוע המשיק משתנה בכל נקודה על גבי הפונקציה שבצורה.

✓ נגזרת

באנליזה (חשבון דיפרנציאלי) מחשבים את שיפוע המשיק בעזרת הנגזרת של הפונקציה, בנקודת ההשקה.

הנגזרת של הפונקציה בנקודת ההשקה = שיפוע המשיק.

$$m = y'(x = \underline{\quad})$$

✓ (1)

✓ לדוגמה הפונקציה $y = x^2$ בנקודה $A(3,9)$ העבירו משיק.

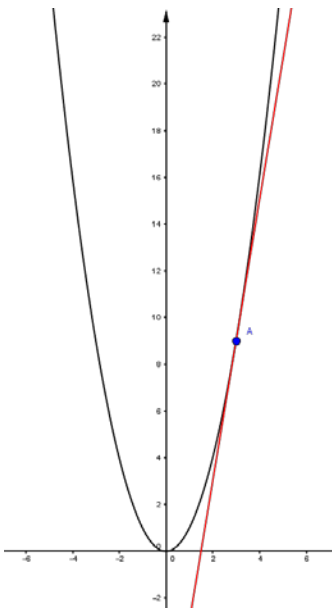
איך נמצא את שיפוע המשיק?

נגזור את הפונקציה ונציב את הנקודה.

אנו נרשום את הנתונים בטבלת הנתונים הבאה:

בכל תרגיל:

השלב הראשון הוא שלב הנתונים – נרשום את הנתונים בטבלה.



$$y = \underline{\quad}$$

$$y' = \underline{\quad}$$

$$m = \underline{\quad}$$

$$x = \underline{\quad}$$

$$m = y'(x = \underline{\quad})$$

השלב השני הוא נוסחה והצבה.

✓ (2)

נתונה הפונקציה $y = 2x^3$ בנקודה $x=3$ העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

✓ (3)

נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3}{3}$ בנקודה $x=2$ העבירו משיק, חשב את שיפוע המשיק

✓ (4)

נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 4x - 2$ בנקודה $(2,10)$ העבירו משיק. מצא את שיפוע המשיק.

✓ (5)

נתונה הפונקציה $y = 3x^2 - 2$ בנקודה $(3,4)$ העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

(6)

נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3}{3} - 2$ בנקודה $(2,10)$ העבירו משיק. מצא את משוואת המשיק.

✓ (7)

נתונה הפונקציה $y = x^2$ בנקודה $x=2$ העבירו משיק, מצא את משוואת המשיק.

✓ (8)

נתונה הפונקציה $y = 8 - 2x^2$ בנקודה $A(1,6)$ העבירו משיק לפרבולה. מצא את משוואת המשיק.

✓ (9)

נתונה הפונקציה $y = 3x^2 - 5x + 1$ מעבירים לפונקציה משיק ששיפועו 7. מצא את נקודת ההשקה

✓ (10)

נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{2} - x + 3$ לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו 1. מצא את נקודת ההשקה.

✓ (11)

ישר משיק לגרף פונקציה $y = x^2 + ax + 7$ בנקודה $x=3$. שיפוע הישר הוא -3. מצא את a .

✓ (12)

נתונה הפונקציה $y = x^2 + ax + 4$ בנקודה $x=1$ העבירו משיק ששיפועו 3.

(א) מצא את a .

(ב) מצא נקודה על הפונקציה אשר בה שיפוע המשיק הוא 5.

✓ (13)

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x$.

עבור איזה ערך של x , מתאפסת הנגזרת?

✓ (14)

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

מצא את הנקודה שעבורה $f'(x)=0$

✓ (15)

נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 3x$.

עבור איזה ערך של x , הנגזרת שווה ל-1?

✓ (16)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.

עבור איזה ערך של x ערך הנגזרת שווה לאפס.

✓ הקשר בין גרף הפונקציה לנגזרתה

✓ תרגיל (1)

איך נשרטט סקיצה של f' ?

מה אנחנו יכולים להסיק מהסתכלות על גרף f על גרף f' ?

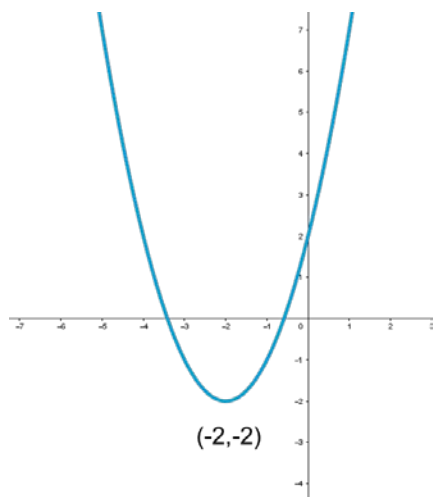
נקודות הקיצון של f הן נקודות האפס של f'

תחומי הירידה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת שלילית

ולכן הם תחומי השליליות של f'

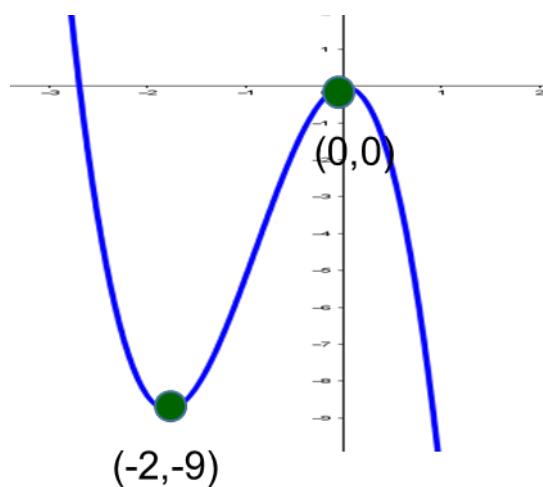
תחומי העלייה של הפונקציה הם התחומים בהם הנגזרת חיובית

ולכן הם תחומי החיוביות של f'



✓ תרגיל (2)

שרטט סקיצה של f' ושל f'' .



✓ תרגיל (3)

שרטט סקיצה של f' של הפונקציה $y = 2x^2 - 8x + 6$

✓ תרגיל (4)

שרטט סקיצה של f' של הפונקציה $y = x^3 - 3x$

תרגיל (5) ✓

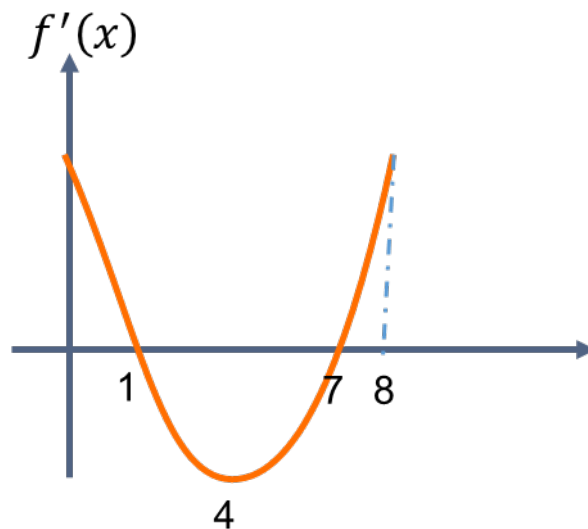
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 8$. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעור ה- x בנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון גם: $f(8) > 0$, $f(4) = 0$, $f(0) = -2$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תרגיל (6) ✓

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- $x=1$. $f'(x)$ היא הנגזרת של $f(x)$.

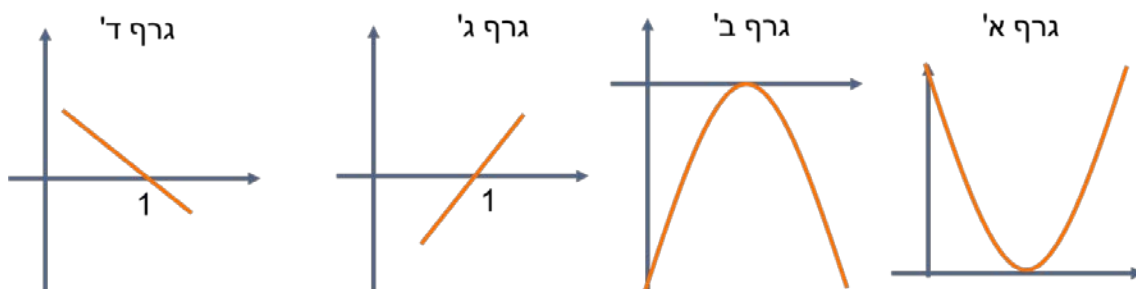
א. מהו שיעור ה- x של הנקודה בה הנגזרת $f'(x)$ שווה לאפס?

ב. מהי הנקודה שבה חותך גרף הנגזרת $f'(x)$ את ציר ה- x ?

ג. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x > 1$?

ד. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x < 1$?

ה. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$?



תרגיל (7) ✓

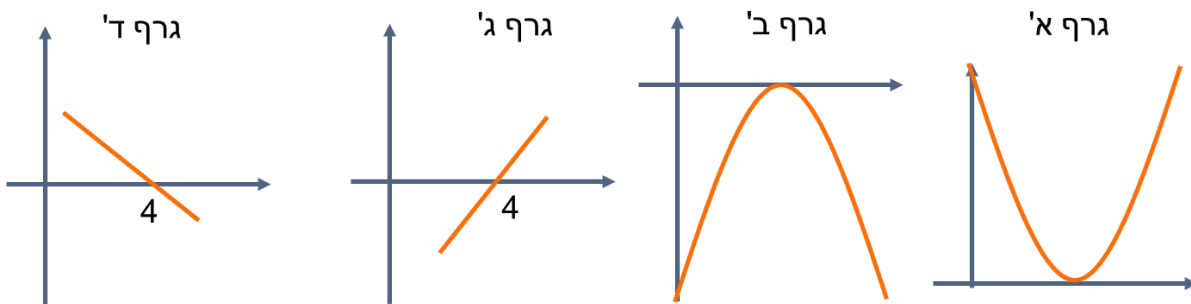
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מקסימום ב- $x=4$.

$f'(x)$ היא הנגזרת של $f(x)$.

א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x > 4$?

ב. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x < 4$?

ג. איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$?

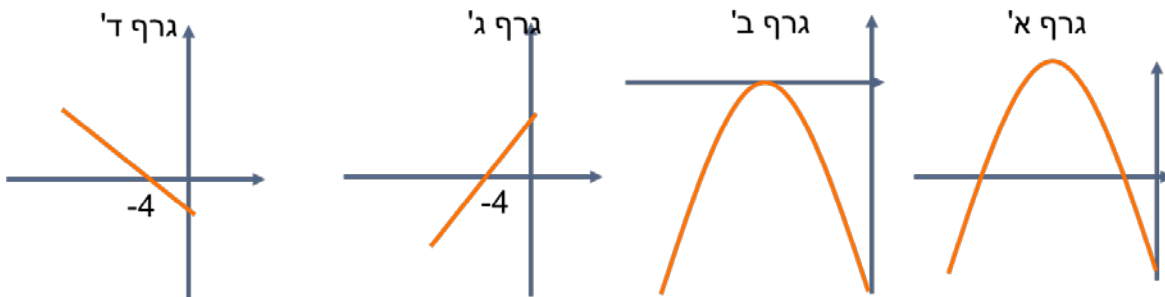


תרגיל (8) ✓

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד והיא נקודת מינימום ב- $x=-4$.

$f'(x)$ היא הנגזרת של $f(x)$.

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$?



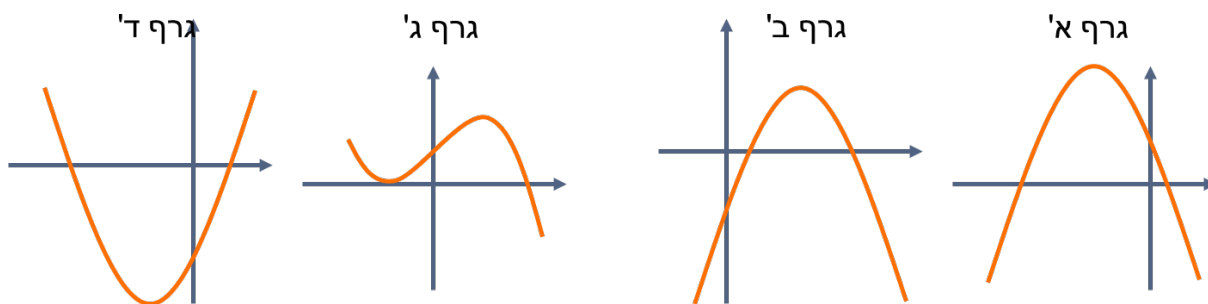
תרגיל (9) ✓

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד.

נקודת מקסימום ב- $x=2$ ונקודת מינימום ב- $x=-4$.

$f'(x)$ היא הנגזרת של $f(x)$.

איזה מן הגרפים הבאים (1,2,3,4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$?



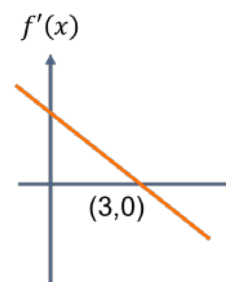
תרגיל (10)

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעור ה-x בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון: $f(3)=2$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

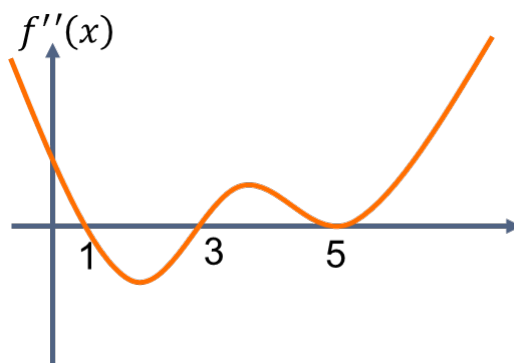


תרגיל (11)

נתונה הפונקציה $f(x)$. בציור מתואר גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

א. מצא את שיעור ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.



✓ חקירת פונקציה

תחום הגדרה

תחום הגדרה של פונקציה



שורש ריבועי לא מוגדר עבור מספרים שליליים

$$y = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$y = \sqrt{x-2} \quad \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{matrix}$$

תחום ההגדרה של שבר

הוא שהמכנה שלו שונה מאפס

$$y = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \begin{matrix} x-4 \neq 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}$$

✓ נקודת קיצון נקודות מקסימום מקומי

בנקודות המינימום והמקסימום הנגזרת של הפונקציה שווה לאפס.

לכן, אם נרצה למצוא את שיעור ה-x של נקודות הקיצון (min/max) נמצא את הנגזרת ונשווה את הנגזרת לאפס.

✓ אז מצאנו נקודת קיצון, איך נקבע את סוג הקיצון (min/max)?

לשם כך ניתן להיעזר באחת משתי השיטות:

(1) באמצעות טבלה

(2) באמצעות נגזרת שנייה (קיימים מקרים שלא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה !!)

✓ קביעת נקודת קיצון באמצעות טבלה

	נקודה קטנה מהנק' החשודה	שיעור x של נק' קיצון	נקודה גדולה מהנק' החשודה
נציב את שיעור x בנגזרת y'			
אם y' > 0 נצייר חץ עולה אם y' < 0 נצייר חץ יורד			

✓ קביעת נקודת קיצון באמצעות נגזרת שנייה

שימו לב !! קיימים מקרים בהם לא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה ולכן מומלץ לקבוע

באמצעות טבלה !

נגזור שוב את הפונקציה ונציב את שיעור ה-x של נקודת הקיצון.

אם $y'' > 0$ אז זאת נקודת מינימום

אם $y'' < 0$ אז זאת נקודת מקסימום

תחומי עלייה וירידה

נראה באמצעות הטבלה מתי יש עלייה ומתי יש ירידה

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר y.

הנקודה (,) A "יושבת" על ציר y.

נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר x.

הנקודה (,) B "יושבת" על ציר x.

שרטוט סקיצה

נסמן במערכת הצירים את נקודות החיתוך עם הצירים ,

את נקודות הקיצון שמצאנו (מינימום ומקסימום)

ניצור כובעים לפי נקודת סיווג נקודות הקיצון (אם מינימום: \cup מקסימום: \cap)

נחבר בין הנקודות ונקבל את הסקיצה של גרף הפונקציה

(17)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

א. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה חותך את ציר ה-y בנקודה B.

מצא את השיעורים של הנקודה B.

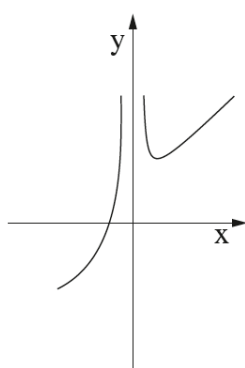


(18)

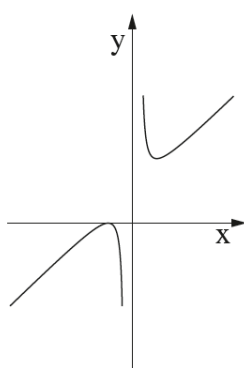
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}$.

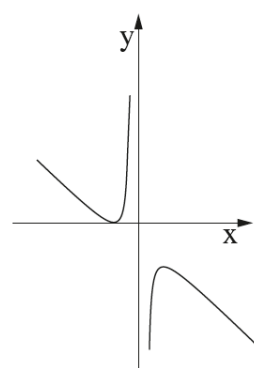
- א. רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ג. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ה. קבע איזה מבין הגרפים III-I שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את קביעתך.



III



II



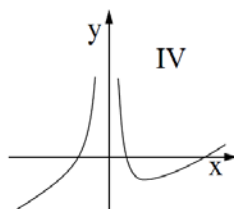
I



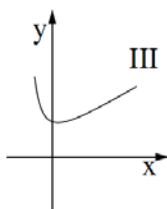
(19)

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

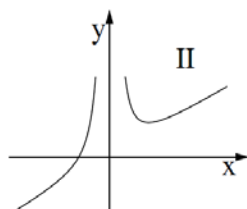
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
 ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ה. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



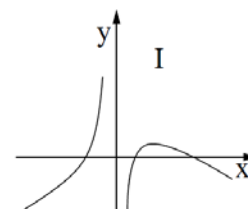
IV



III



II



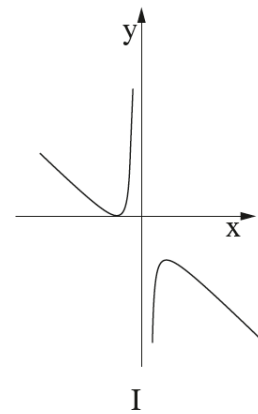
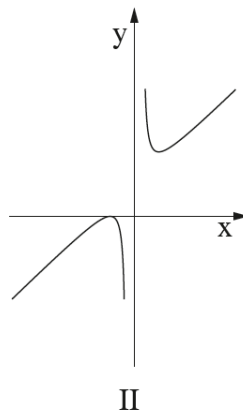
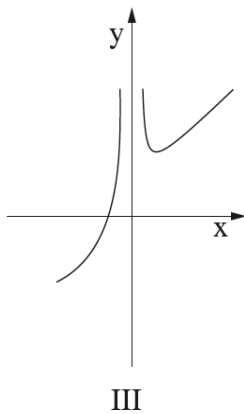
I

(1) ✓

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}$.

- א. רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ג. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. קבע איזה מבין הגרפים III-I שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את קביעתך.



(2) ✓

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$.

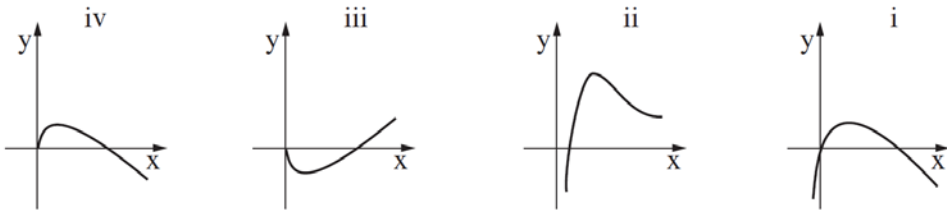
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(2.52, 0)$. היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) ✓

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את x שעבורו $f'(x) = 0$.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.
- איזה מהגרפים i-iv שלפניך הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



(4) ✓

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.

