<u>תלמידים יקרים</u>

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **גאומטריה של המישור**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומר עזר לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

רוית הלפנבאום

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

סימנים נפוצים

∆ משולש

∢ זווית

≅ חפיפה

3 שלבים בהוכחה

א. כתיבת הנתונים בצרוף השרטוט

ב. כתיבת מה שצריך להוכיח

ג. כתיבת ההוכחה

(א) כתיבת הנתונים בצרוף השרטוט

בהתחלה נרשום **נתון**: ____________________

נתרגם את נתוני הבעיה לכתיבה מתמטית/פורמלית, זהו כתיב הכולל רק סימנים מתמטיים ואותיות באנגלית.

נצרף שרטוט (גדול לשם נוחות) כדי לדעת את מיקום הנתונים.

(ב) כתיבת מה שצריך להוכיח

בהתחלה נרשום מה שצריך להוכיח.

צריך להוכיח בקיצור: **צ"ל**

נתרגם את דרישות הטענה לכתיב מתמטי/פורמלי

נבדוק שהשרטוט מכיל את מה שצ"ל.

(ג) כתיבת ההוכחה

נרשום כותרת **הוכחה**:

נכתוב את ההוכחה בשלושה טורים:

מספר	**טענה**	**נימוק**

בסוף ההוכחה נרשום **מ.ש.ל** (מה שצריך להוכיח)

<u>תרגיל</u>

<u>נתון:</u>

$$\Delta ABC$$

$$AB = AC$$

<u>צ"ל</u>: $\sphericalangle \boldsymbol{B} = \sphericalangle \boldsymbol{C}$

<u>הגדרה , משפט</u>

הגדרה עונה לשאלה:

מה זו הצורה הזו?

הגדרה: אמירה שמתארת מושגים באמצעות מושגי יסוד או מושגים שכבר הוגדרו.

משפט – טענה לגביה נוכל להגיד אם היא אמת או שקר.

<u>אקסיומות</u>

כדי להוכיח משפט נצטרך להיסתמך על משפט קודם.

את המשפט הקודם.. גם אותו נצטרך להוכיח...

לכן, יהיו לנו משפטים התחלתיים שאותם נקבל ללא הוכחה.

למשפטים האלה – המשפטים ההתחלתיים נקרא אקסיומות.

<u>אקסיומה</u> – משפט שמקבלים אותו כנכון בלי להוכיחו.

(השלם גדול מחלקיו, בין 2 נקודות עובר ישר אחד)

משפטים בגיאומטריה מוכיחים בהסתמך על משפטים קודמים או על אקסיומות.

ואת ההגדרות אנו מגדירים בעזרת מילים שגם אותן צריך להגדיר ולכן יש לנו בגיאומטריה שלושה מושגי יסוד בהם נשתמש ולא נגדיר.

מושגי יסוד

בגאומטריה מבחינים בין שני סוגים של מושגים:

א. מושגים ראשוניים

ב. מושגים מוגדרים

מושגי יסוד: א. מושגים ראשוניים

מושגים ראשוניים – מושגים שמקבלים אותם ללא הגדרה. מושג ראשוני מבינים על פי תכונותיו.

נקודה,ישר,מישור,מרחב - את המושגים האלה אין מגדירים. הם נקראים מושגים ראשוניים. באופן אינטואיטיבי אפשר ללמוד מה משמעותו של כל מושג על פי המאפיינים שלו.

דוגמאות של מאפיינים (בניסוח חופשי):

נקודה - מציינת מיקום במרחב, אבל לה עצמה אין אורך, רוחב או עובי (אין לה ממדים)

ישר – הישר לא מוגבל בשני הכיוונים, לישר אין עובי, על הישר יש אינסוף נקודות, דרך נקודה אחת עוברים אינסוף ישרים, דרך 2 נקוודת עובר רק ישר אחד.

מישור – המישור הוא דו-ממדי, למישור אין עובי, המישור אינו מוגבל והוא "נמשך לאינסוף" בכל הכיוונים, דרך 3 נקודות שלא נמצאות על אותו ישר עובר מישור אחד ויחיד, דרך 2 ישרים נחתכים עובר מישור אחד ויחיד

מושגי יסוד: ב. מושגים מוגדרים

מושגים מוגדרים – המושגים שבקבוצה זו הם מושגים שאנו מגדירים בעזרת המושגים הראשוניים או בעזרת מושגים מוגדרים אחרים.

הגדרה - תיאור מדויק של המושג המסתמך על מושגים שהוגדרו קודם, או על מושגים ראשוניים. הגדרה של מושג היא כלל שקובע חד-משמעית מה שייך למושג (מהווה דוגמה שלו) ומה לא.

(ההגדרה עונה על השאלה מה זו הצורה הזו?)

תכונות של מושג/משפט - לכל מושג מאפיינים רבים. חלקם משמשים להגדרת המושג, ואין צורך לנמק או להוכיח אותם. המאפיינים האחרים נקראים תכונות של המושג, ואת התכונות צריכים להוכיח.

משפט – טענה לגביה נוכל להגיד אם היא אמת או שקר.

מבוא

מושגי יסוד

<u>נקודה</u> – מציינת מיקום במרחב, אבל לה עצמה אין אורך, רוחב או עובי (אין לה ממדים).

<u>ישר</u> – לא מוגבל משני הכיוונים. לישר יש אורך ואין רוחב וגובה.

<u>מישור</u> – המישור הוא אינסופי, למישור יש אורך ורוחב אך אין לו גובה.

קרן, קטע

הגדרה:

קרן –חלק של **ישר** המוגבל מצדו האחד ע"י **נקודה**.

קטע – חלק של **ישר** המוגבל משני צדדיו ע"י שתי **נקודות**.

קרן, קטע

הגדרה:

קרן –חלק של **ישר** המוגבל מצדו האחד ע"י **נקודה**.

קטע – חלק של **ישר** המוגבל משני צדדיו ע"י שתי **נקודות**.

<u>תרגיל</u>

על הקטע AF שבציור סומנו 5 קטעים.

בטא ע"י אחד את החיבור והחסור של הקטעים הבאים:

א. AB+BC

ב. BD-BC

ג. BD-CD

ד. BD+DE

ה. AE-AC

ו. AD-BD+BC

ז. AB+BC+CD

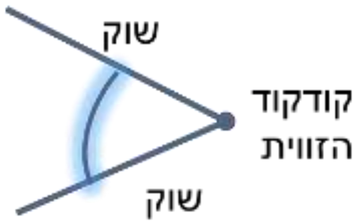
ח. CD+DE+EF

ט. CE-DE+BC

זוית

זוית – שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת יוצרות צורה(זוית).

הקרניים נקראות **שוקי הזווית** והנקודה ממנה יוצאות הקרניים נקראת **קודקוד הזוית**.



סימון זוויות

נסמן זוויות כך:

א. על ידי שלוש אותיות לטיניות גדולות, וסימן ∢ לפניהן: האות האמצעית מציינת את קודקוד הזווית,

ושתי האותיות האחרות הן נקודות על שוקי הזווית. בכתיב מתמטי: $\sphericalangle BCA$

ב. על ידי אות לטינית אחת גדולה, שמציינת את קודקוד הזווית. בכתיב מתמטי: $\sphericalangle C$

ג. על ידי מספרים המסומנים בתוך הזווית

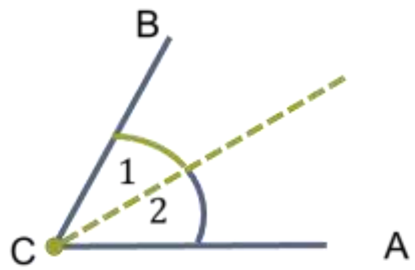
בכתיב מתמטי: $\sphericalangle C_1$ או $\sphericalangle 1$

בכתיב מתמטי: $\sphericalangle C_2$ או $\sphericalangle 2$

ד. על ידי אותיות יווניות קטנות:

α (אלפא), β (ביתא), γ (גמא), δ (דלתא), וכו'

במקרה זה אין לרשום את הסימן ∢ לפני האותיות. נרשום α, ולא $\sphericalangle\alpha$.



זווית שטוחה

זווית ששתי שוקיה נמצאות על קו ישר אחד.

זווית ששוקיה יוצרות ישר.

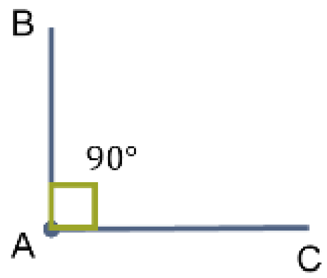
זווית שטוחה שווה ל- 180°

זווית ישרה

- מחצית מזווית שטוחה.
- זווית ישרה שווה ל- $90°$
- כל אחת מהזוויות מתקבלות כאשר חוצים זווית שטוחה.

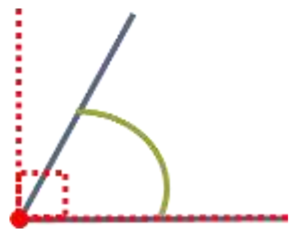
<u>הסימון</u>: $\sphericalangle BAC = 90°$

<u>סימון נוסף</u>: $AB \perp AC$



זווית חדה

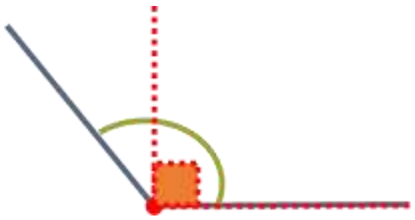
- זווית הקטנה מזווית ישרה.
- זווית הקטנה ממש מ- 90°

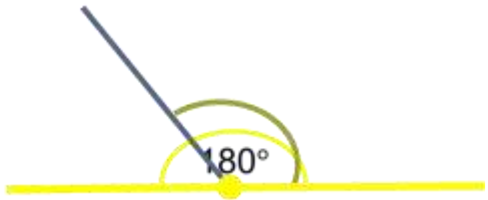


זווית קהה

זווית הגדולה מזווית ישרה.

זווית הגדולה ממש מ- 90° וקטנה ממש מ- 180°

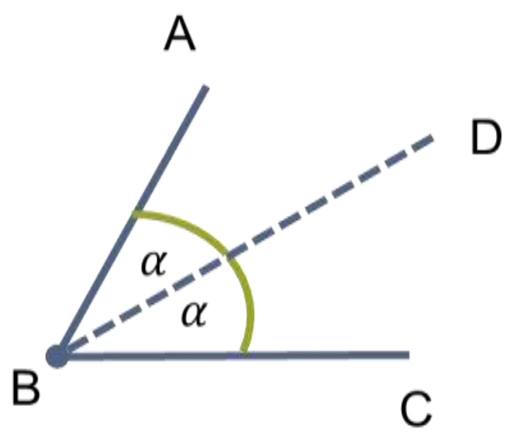




חוצה זווית

קרן היוצאת מקודקוד הזווית ומחלקת אותה לשתי זוויות שוות BD חוצה זווית $\sphericalangle ABC$.

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$



זוויות צמודות/סמוכות

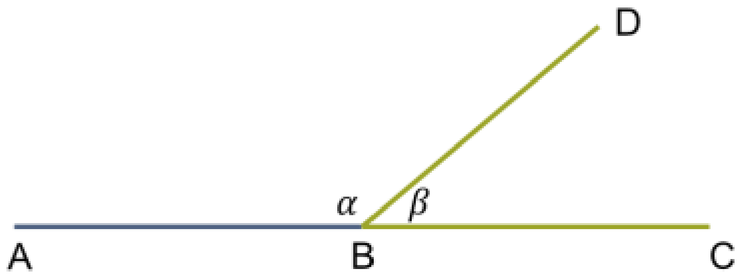
הן שתי זוויות בעלות קודקוד ושוק משותף,

ושתי השוקיים האחרות נמצאות על ישר אחד ובכיוונים מנוגדים.

אלו הן שתי זוויות היוצרות יחד זווית שטוחה.

<u>מסקנה:</u> סכום זוויות צמודות/סמוכות שווה ל- 180°

$\alpha + \beta = 180°$

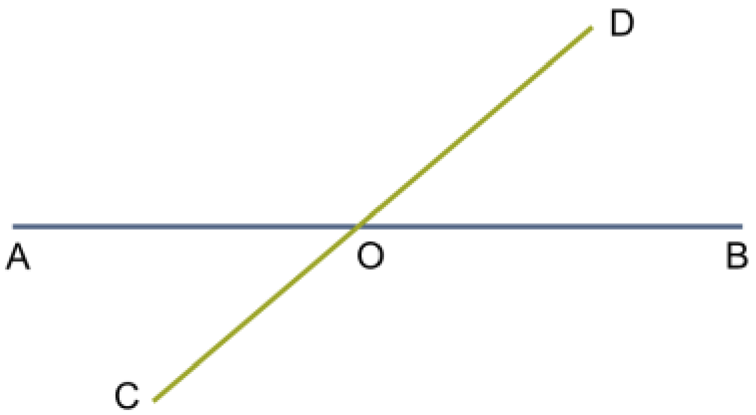


<u>תרגיל</u>

הוכחת המשפט: זוויות סמוכות משלימות ל- 180°

נתון: AB,CD ישרים הנחתכים בנק' O.

צ"ל: $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = 180°$



<u>זוויות קדקודיות</u>

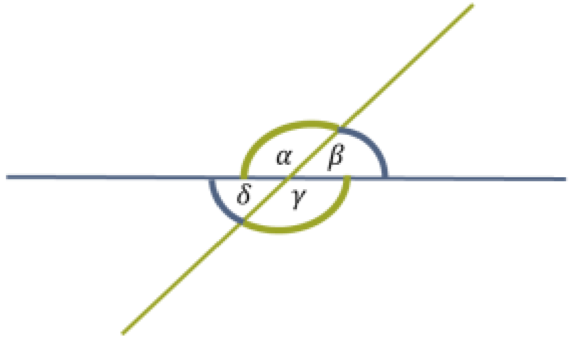
כששני ישרים נחתכים נוצרות ארבע זוויות.

וכל שתי זוויות שאינן צמודות נקראות זוויות קודקודיות.

<u>משפט</u>: כל שתי זוויות קדקודיות שווֹת זו לזו

$\alpha = \gamma$

$\beta = \delta$

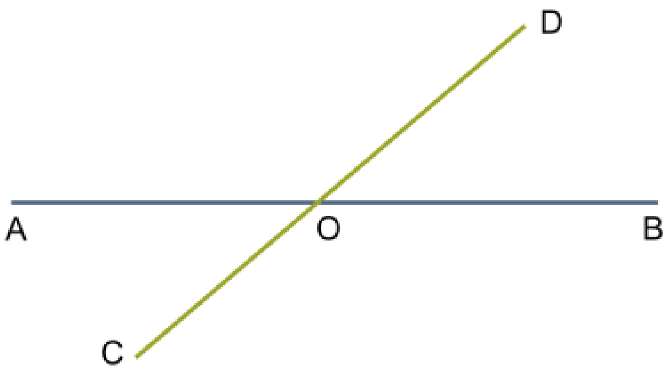


<u>תרגיל</u>

הוכחת המשפט: עבור שני ישרים נחתכים כל שתי זוויות נגדיות שוות בגודל.

נתון: AB,CD ישרים הנחתכים בנק' O.

צ"ל: $\sphericalangle DOB = \sphericalangle AOC$ ו- $\sphericalangle COB = \sphericalangle AOD$



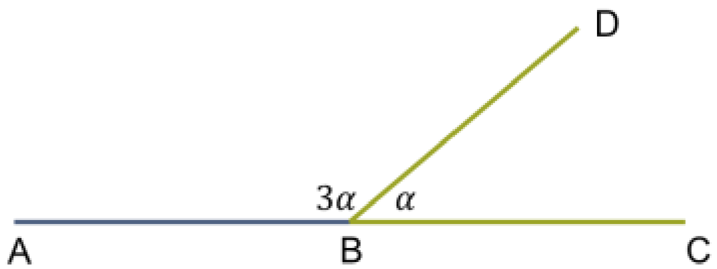
<u>תרגיל</u>

הנקודה B נמצאת על הקטע AC.

נתון: $\sphericalangle ABD = 3\alpha$, $\sphericalangle DBC = \alpha$

א. חשב את α.

ב. מהו גודל הזווית ACD?



<u>תרגיל</u>

בטא בעזרת זווית אחת את החבור והחסור של הזויות הבאות:

א. $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBE$

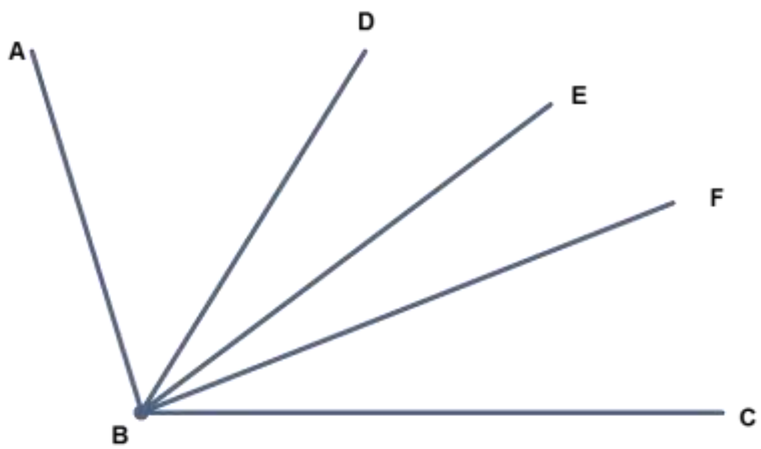
ב. $\sphericalangle DBF + \sphericalangle FBC$

ג. $\sphericalangle EBC - \sphericalangle FBC$

ד. $\sphericalangle DBE - \sphericalangle EBF$

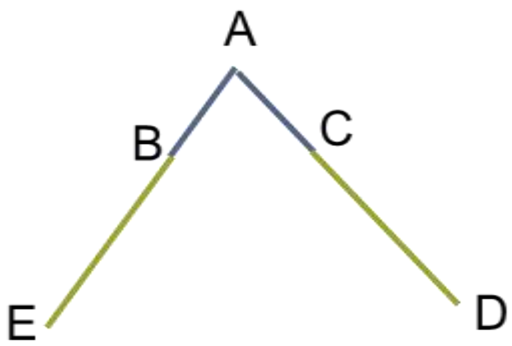
ה. $\sphericalangle ABF - \sphericalangle ABE$

ו. $\sphericalangle ABC - \sphericalangle EBC$



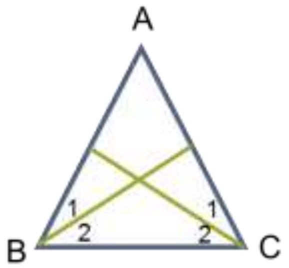
<u>טענות שימושיות</u>

אם לגדלים שווים נוסיף גדלים שווים נקבל גדלים שווים



נתון: $AB = AC$, $BE = CD$

לכן: $AB + BE = AC + CD$ <= $AE = AD$



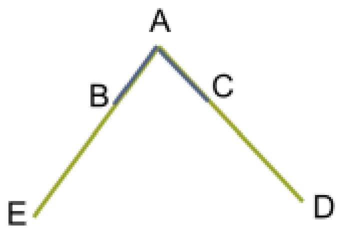
נתון: $\measuredangle C_1 = \measuredangle B_1$

$\measuredangle C_2 = \measuredangle B_2$

לכן: $\measuredangle C_1 + \measuredangle C_2 = \measuredangle B_1 + \measuredangle B_2$

$\measuredangle C = \measuredangle B$

אם מגדלים שווים נוריד גדלים שווים נקבל גדלים שווים

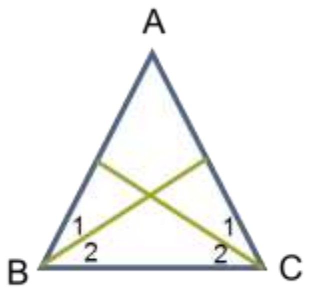


נתון: $AB = AC$

$AE = AD$

לכן: $AE - AB = AD - AC$

$BE = CD$



נתון: $\measuredangle C = \measuredangle B$

$\measuredangle C_2 = \measuredangle B_2$

לכן: $\measuredangle C - \measuredangle C_2 = \measuredangle B - \measuredangle B_2$

$\measuredangle C_1 = \measuredangle B_1$

חצאי גדלים שווים שווים ביניהם

משפחת המשולשים

משולש הוא מצולע בעל שלוש צלעות.

למשולש **שלושה קודקודים** המסומנים באותיות לועזיות גדולות: A,B,C.

למשולש **שלוש צלעות** המסומנות באחת משתי הדרכים הבאות:

a,b,c כל צלע מסומנת על ידי אות לועזית קטנה, או:

AB,AC,CB כל צלע מסומנת על ידי זוג אותיות לועזיות גדולות, בהתאם לקצוות של הצלע.

כלומר: AB=c, AC=b, CB=a.

המשולש יסומן על ידי **הסימן** Δ: ΔABC (משולש שקודקודיו A, B ו- C)

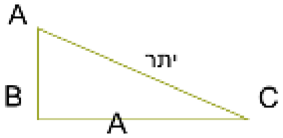
למשולש **שלוש זוויות**, **סכום הזוויות הפנימיות במשולש** = 180 מעלות.

<u>מיון המשולשים לפי הצלעות</u>

אם נסתכל על צלעות המשולשים נוכל לחלק את משפחת המשולשים בחלוקה לפי צלעות:

א. **<u>משולש שונה צלעות</u>** – משולש שכל צלעותיו שונות.

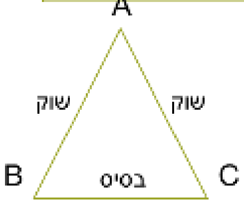
$AB \neq BC \neq AC$



ב. **<u>משולש שווה שוקיים</u>** – משולש ששתיים מצלעותיו שוות.

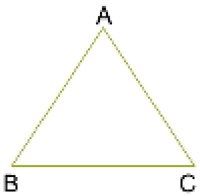
הצלעות השוות נקראות **שוקיים** (AB=AC)

הצלע השלישית נקראת **בסיס** (BC)



ג. **<u>משולש שווה צלעות</u>** – משולש שכל צלעותיו שוות.

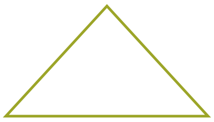
AB=BC=AC



<u>מיון המשולשים לפי הזוויות</u>

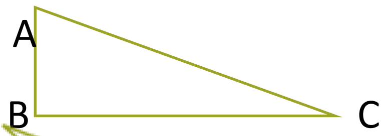
אם נסתכל על זוויות המשולשים נוכל לחלק את משפחת המשולשים בחלוקה לפי זוויות:

א. **משולש חד זווית** – משולש שכל זוויותיו חדות.

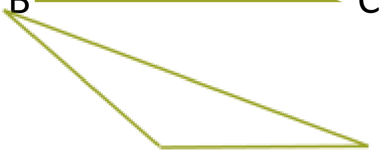


ב. **משולש ישר זווית** - משולש שאחת מזוויותיו ישרה:

$\measuredangle B = 90°$



ג. **משולש קהה זווית** - משולש שאחת מזוויותיו קהה

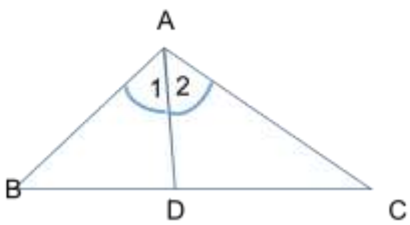


<u>חוצה זווית במשולש</u>

חוצה זווית במשולש הוא קטע היוצא מקודקוד זווית המשולש ומחלק את הזווית לשתי זוויות שוות:

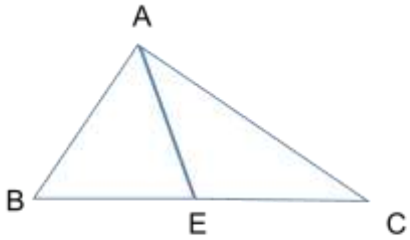
AD הוא חוצה זווית $\measuredangle BAC$.

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$



תיכון במשולש

קטע המחבר את קודקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו:



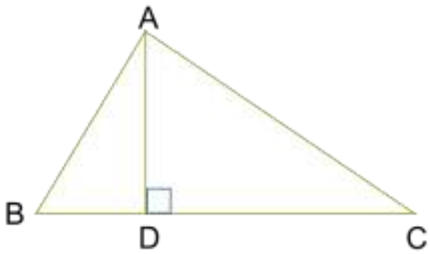
AE הוא **תיכון** במשולש ΔABC

$$BE = EC$$

שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

גובה במשולש

קטע היוצא מקודקוד משולש ומאונך לצלע שממול (או להמשכה)

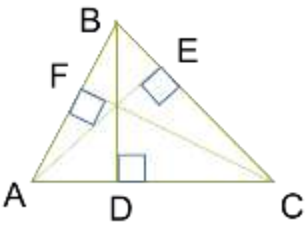


AD הוא גובה לצלע BC במשולש ΔABC

הסימון: $AD \perp BC$ או $\measuredangle ADC = 90°$

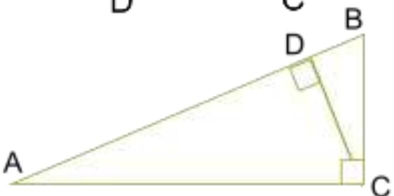
שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

גבהים במשולש שונים



במשולש חד זווית שלושת הגבהים נמצאים בתוך המשולש:

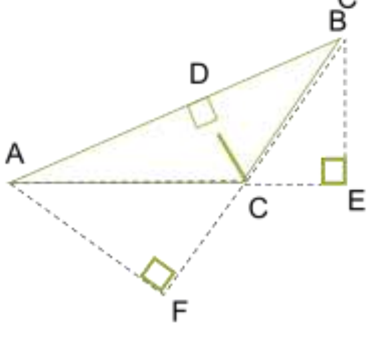
הגבהים BD , AE ו- CF נמצאים בתוך המשולש.



במשולש ישר זווית שתי צלעות משתמשות גם כגבהים במשולש:

CD הוא גובה לצלע AB, והוא נמצא בתוך המשולש,

הצלע BC היא גובה לצלע AC, ולהפך.



במשולש קהה זווית שני גבהים נמצאים מחוץ למשולש:

CD הוא גובה לצלע AB, והוא בתוך המשולש,

BE הוא גובה לצלע AC, מאונך להמשכה ונמצא מחוץ למשולש,

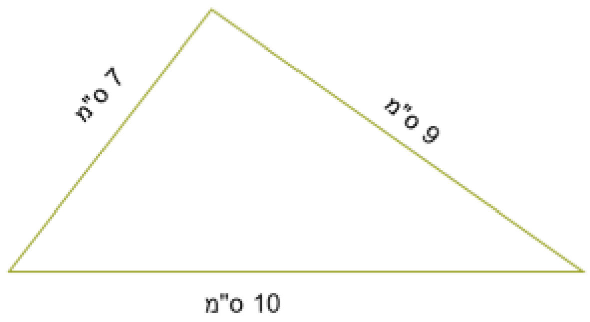
AF הוא גובה לצלע BC, מאונך להמשכה ונמצא מחוץ למשולש.

היקף משולש

היקף משולש כללי, שנסמנו בעזרת האות p, הוא סכום אורכי שלושת צלעותיו.

תרגיל

חשב היקף משולש:



שטח משולש

מחצית מכפלת צלע בגובה לאותה צלע

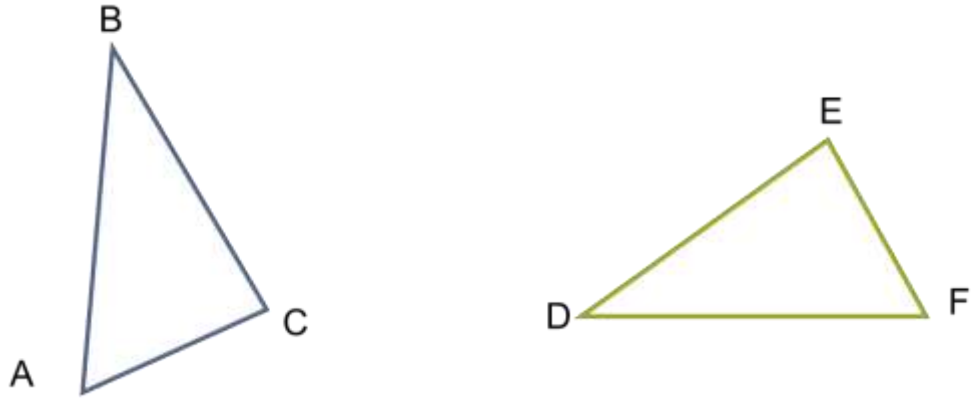
גובה במשולש הוא קו שיורד ב- $90°$ מהקודקוד שמול הבסיס, אל הבסיס

$$S_\Delta = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

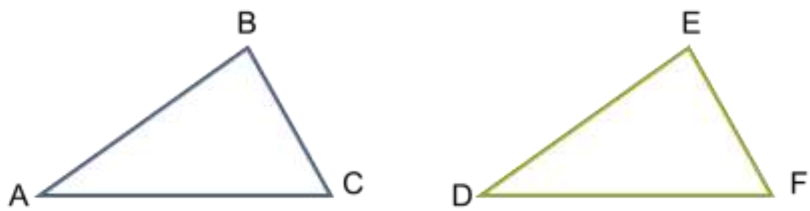
חפיפת משולשים

הגדרה: שתי צורות חופפות, אם אפשר להניח אחת מהן על השנייה, כך שתכסה אותה בדיוק. לשם כך ניתן להזיז, לסובב, ולהפוך את הצורות.

שני משולשים נקראים משולשים חופפים, כאשר שלושת הצלעות ושלושת הזוויות של המשולש האחד שוות בהתאמה, לשלושת הצלעות ולשלושת הזויות של המשולש האחר.



הגדרה: שני משולשים שבהם שוות בהתאמה שלוש הצלעות ושלוש הזוויות, נקראים **משולשים חופפים**.



למשל, אם המשולשים ABC ו- DEF חופפים זה לזה,

אז מתקיים שוויון בין הצלעות המתאימות: AB=DE , BC=EF , AC=DF.

ומתקיים שוויון בין הזוויות המתאימות: $\sphericalangle A=\sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B=\sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C=\sphericalangle F$

ולכן: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

יש לשים לב ולהקפיד על כתיבת החפיפה כך שהקדקודים המתאימים יופיעו באותו סדר, כך שקדקוד A מתאים לקדקד D, וקדקד B מתאים לקדקד E וכך הלאה.

כאשר שני משולשים חופפים זה לזה מתקיימים שישה שוויונות –

שוויון בשלוש הצלעות המתאימות

ושוויון בשלוש הזוויות המתאימות.

במשולשים חופפים:

מול **צלעות שוות** נמצאות **זויות שוות.**

(נהוג לנמק: **זמב"ח** = זויות **מ**תאימות **ב**משולשים **ח**ופפים.)

מול **זוויות שוות** נמצאות **צלעות שוות**

(נהוג לנמק: **צמב"ח** = צלעות **מ**תאימות **ב**משולשים **ח**ופפים.)

משפט חפיפה ראשון - צ.ז.צ

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן אז המשולשים חופפים.

משפט החפיפה הראשון הוא אקסיומה (ללא הוכחה).

אם מתקיים:

AB=DE ,

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$,

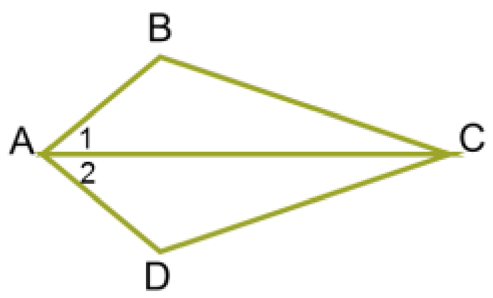
AC=DF

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

תרגיל

במרובע ABCD נתון: AB=AD , $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

הוכח: BC=DC



משפט חפיפה שני - ז.צ.ז

אם בשני משולשים שוות בהתאמה צלע ושתי הזווית שלידה אז המשולשים חופפים.

אם מתקיים:

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$,

, AB=DE

$\sphericalangle B = \sphericalangle E$,

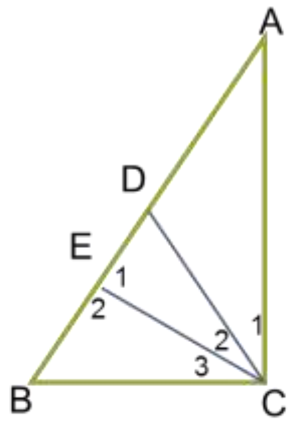
אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

תרגיל

ABC הוא משולש ישר זוית.

התיכון CD ליתר, והגובה CE ליתר מחלקים את הזוית הישרה לשלושה חלקים שווים.

הוכח כי הניצב CB שווה לתיכון CD.



משפט חפיפה שלישי - צ.צ.צ

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שלוש הצלעות אז המשולשים חופפים.

אם מתקיים:

, AB=DE

, BC=EF

AC=DF

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

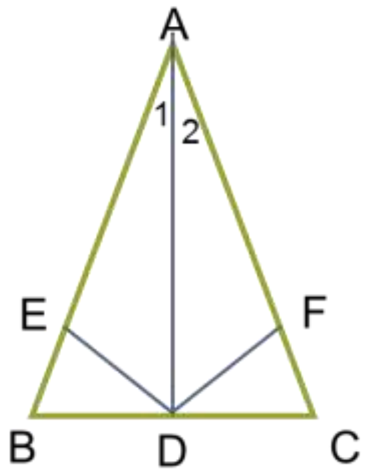
תרגיל

נתון: AB=AC , EB=FC , $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

הוכח: א. $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

ב. $\Delta AED \cong \Delta AFD$

ג. $\Delta EBD \cong \Delta FCD$



משפט חפיפה רביעי - צ.צ.ז

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מהשתיים אז המשולשים חופפים.

אם מתקיים:

, AC=DF

, BC=EF

$\sphericalangle B = \sphericalangle E$

ובנוסף: AC>BC

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

משולש שווה שוקיים

הגדרה: משולש שווה שוקיים הוא משולש ששתיים מצלעותיו שוות.

לצלעות השוות קוראים שוקיים.

לצלע השלישית קוראים בסיס.

משפט (1) זויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו.

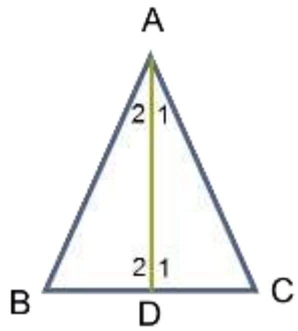
נתון: ΔABC משולשת שווה שוקיים, $AB = AC$

טענת המשפט: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

משפט (2) במשולש שווה שוקיים חוצה זוית הראש הוא גם תיכון לבסיס וגם גובה לבסיס.

נתון: ΔABC משולשת שווה שוקיים, $AB = AC$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

טענת המשפט: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2 = 90°$, $BD = DC$



תרגיל

הוכח את המשפט: במשולש שווה שוקיים חוצה זוית הראש הוא גם גובה לבסיס וגם תיכון לבסיס.

משפט (3) הפוך ל-2

משפט (3) (**הפוך ל-2**) אם במשולש חוצה הזוית מלכד עם הגובה אז המשולש שווה שוקיים.

נתון: ΔABC משולשת שווה שוקיים, $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2 = 90°$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

טענת המשפט: , $AB = AC$

תרגיל

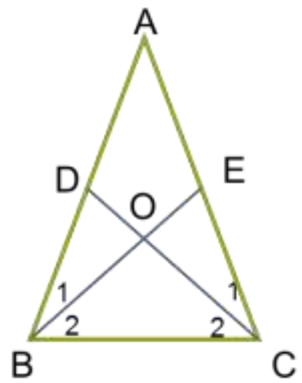
הוכח את המשפט: אם במשולש חוצה הזוית מתלכד עם הגובה אז המשולש שווה שוקיים.

<u>תרגיל</u>

נתון משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB=AC)

א. הוכח כי התיכונים לשוקיים שווים זה לזה.

ב. התיכונים לשוקים נפגשים בנקודה O. הוכח כי ΔBOC הוא משולש שווה שוקיים.



דלתון

מרובע הבנוי משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף נקרא דלתון.

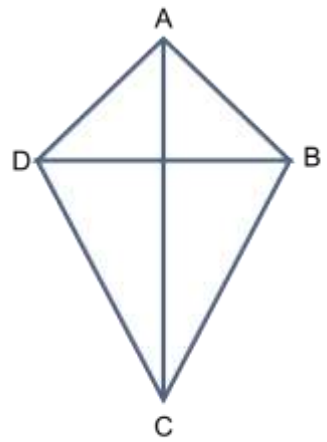
הדלתון הוא מרובע שלו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו.

קדקוד של הדלתון, שהוא נקודת חיתוך של שתי צלעות (סמוכות) השוות זו לזו, נקרא **קדקוד ראשי**, והזווית בקדקוד זה נקראת **זווית ראש**.

הזוויות בשני הקדקודים האחרים נקראות **זוויות צד**.

האלכסון המחבר שני קדקודים ראשיים בדלתון נקרא **האלכסון הראשי**.

האלכסון האחר נקרא **האלכסון המשני**.



<u>האלכסון הראשי בדלתון מקיים:</u>

(1) חוצה את זווית הראש

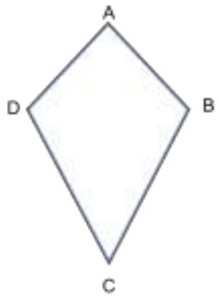
(2) חוצה את האלכסון המשני

(3) מאונך לאלכסון המשני

כדי להוכיח שהמרובע הוא דלתון יש להראות שהוא בנוי משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף

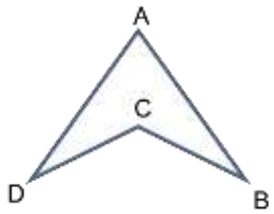
<u>קיימים שני סוגי דלתונים:</u>

(1) דלתון **קמור** – כאשר שני קדקודי זוויות הראש של שני המשולשים נמצאים משני צידי הבסיס



המשותף.

(2) דלתון **קעור** – כאשר שני קדקודי זוויות הראש של שני המשולשים נמצאים באותו צד של



הבסיס.

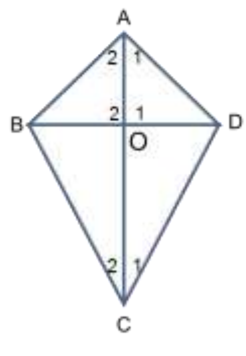
<u>תרגיל</u>

הוכח את משפט הדלתון: האלכסון הראשי בדלתון מקיים את התנאים הבאים:

א. חוצה את זויות הראש של הדלתון

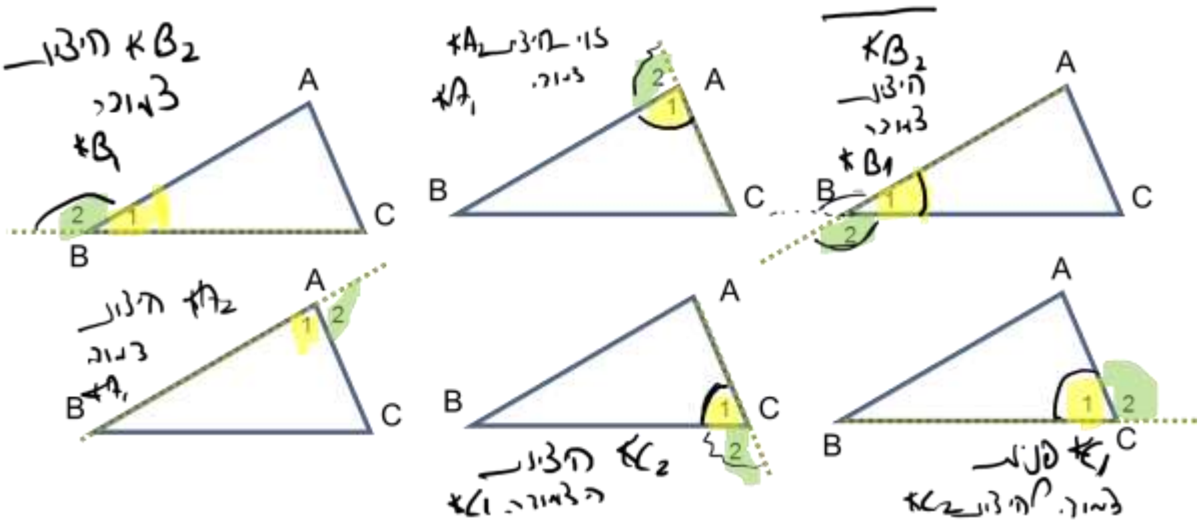
ב. חוצה את האלכסון המשני

ג. מאונך לאלכסון המשני.



זוית חיצונית למשולש

הגדרה: זוית, הצמודה לזוית פנימית במשולש, נקראת זוית חיצונית למשולש.

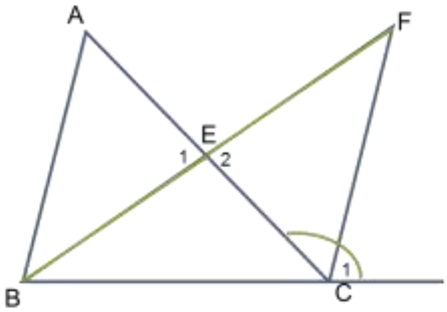


משפט: זוית חיצונית למשולש גדולה מכל אחת משתי הזויות הפנימיות, שאינן צמודות לה.

תרגיל

הוכח את המשפט: זוית חיצונית למשולש גדולה מכל אחת משתני הזויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

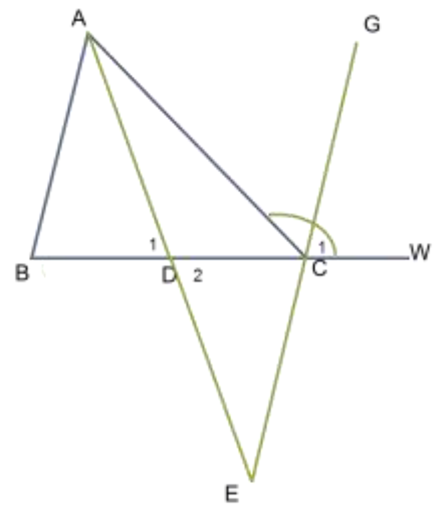
צ"ל: א. $\measuredangle C_1 > \measuredangle A$ ב. $\measuredangle C_1 > \measuredangle B$



תרגיל

הוכח את המשפט: זוית חיצונית למשולש גדולה מכל אחת משתני הזויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

צ"ל: א. $\measuredangle C_1 > \measuredangle A$ ב. $\measuredangle C_1 > \measuredangle B$


A
G
1
1
B
D
2
C
W
E

צלעות וזויות במשולש

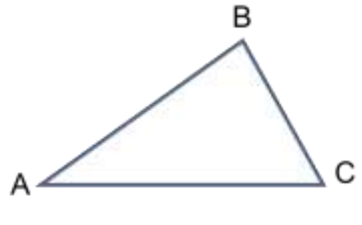
משפט (10) במשולש, מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה

משפט 10: אם צלע אחת במשולש גדולה מצלע שנייה, אז הזווית הנמצאת שמול הצלע הגדולה, גדולה מהזווית הנמצאת מול הצלע הקטנה.

ניסוח ברשימת המשפטים: במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זוית גדולה יותר.

אם נתון: AC>AB

אז מתקיים: $\sphericalangle B > \sphericalangle C$

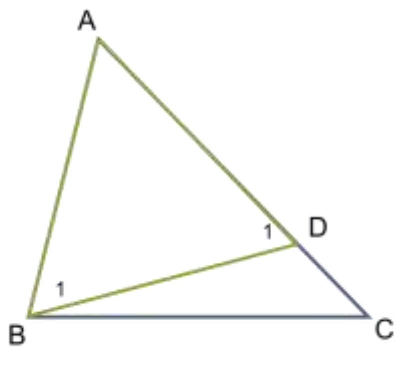


תרגיל

הוכח את המשפט: אם צלע אחת במשולש גדולה מצלע שניה, אזי הזוית שמול הצלע הגדולה, גדולה מהזוית שמול הצלע הקטנה.

נתון: $AC > AB$

צ"ל $\sphericalangle B > \sphericalangle C$



משפט (3) במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות

משפט: במשולש, מול זוויות שוות במשולש, נמצאות צלעות שוות.

אם נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

אז מתקיים: BC=AB

תרגיל

הוכח את המשפט: מול זויות שוות נמצאות צלעות שוות

נתון: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

צ"ל $AB = AC$

משפט (11) במשולש, מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר

משפט: אם זווית אחת במשולש גדולה מזווית שנייה, אז הצלע הנמצאת מול הזווית הגדולה, גדולה מהצלע הנמצאת מול הזווית הקטנה.

ניסוח ברשימת המשפטים: במשולש (שאינו שווה זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.

אם נתון: $\sphericalangle B > \sphericalangle C$

אז מתקיים: AC>AB

תרגיל

הוכח את המשפט: אם זוית אחת במשולש גדולה מזוית שניה, כי אז הצלע שמול הזוית הגדולה, גדולה מהצלע שמול הזוית הקטנה

נתון: $\sphericalangle B > \sphericalangle C$

צ"ל $AC > AB$

משפט (5) סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

משפט: סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

בכל משולש ABC מתקיים:

AB+AC>BC

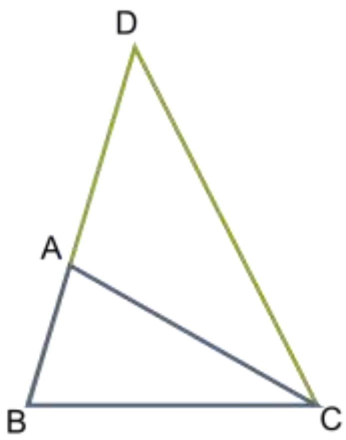
AC+BC>AB

AB+BC>AC

תרגיל

הוכח את המשפט: סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

צ"ל $AB + AC > BC$



משפט (12) סכום זויות במשולש

משפט: סכום הזוויות של משולש הוא *180°*.

נתון: ΔABC

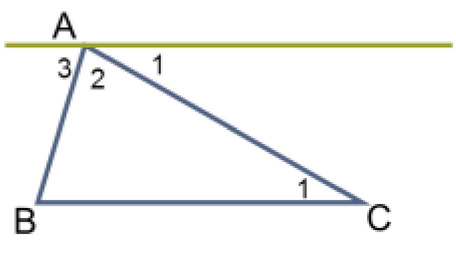
מתקיים:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$

תרגיל

הוכח את המשפט: סכום הזוויות במשולש הוא *180°*.

צ"ל $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$



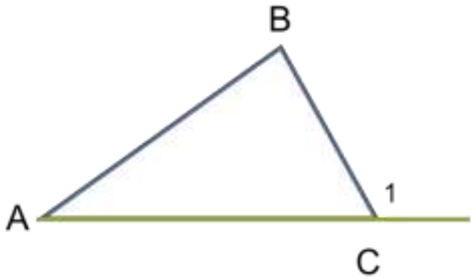
משפט (13) זוית חיצונית למשולש

משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

נתון: ΔABC

מתקיים:

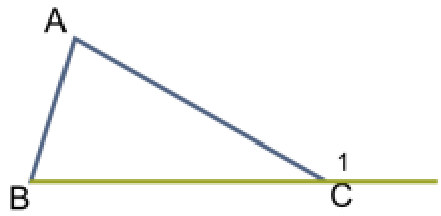
$$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B$$



<u>תרגיל</u>

הוכח את המשפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

צ"ל $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B$



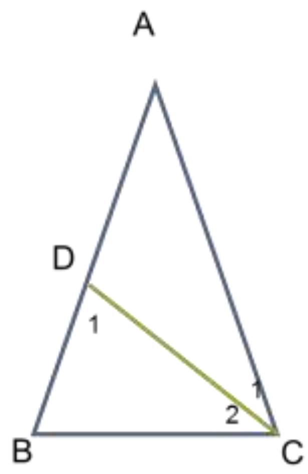
<u>תרגיל</u>

משולש ABC הוא שווה שוקיים (AB=AC). D היא נקודה על השוק AB.

נתון: AD=CD=BC.

א. הוכח כי CD חוצה את הזווית C.

ב. מצא את α, גודל הזוית A.


A
D
1
1
2
B
C

<u>יחסים בין ישרים</u>

<u>ישרים מקבילים</u>

ישרים מקבילים זה לזה - שני ישרים במישור שאין להם אף נקודה משותפת

הסמל למקביל הוא ∥

$a \parallel b$ פירושו: הישרים a ו- b מקבילים זה לזה.

קטעים מקבילים זה לזה - קטעים קטעים המוכלים בישרים מקבילים.

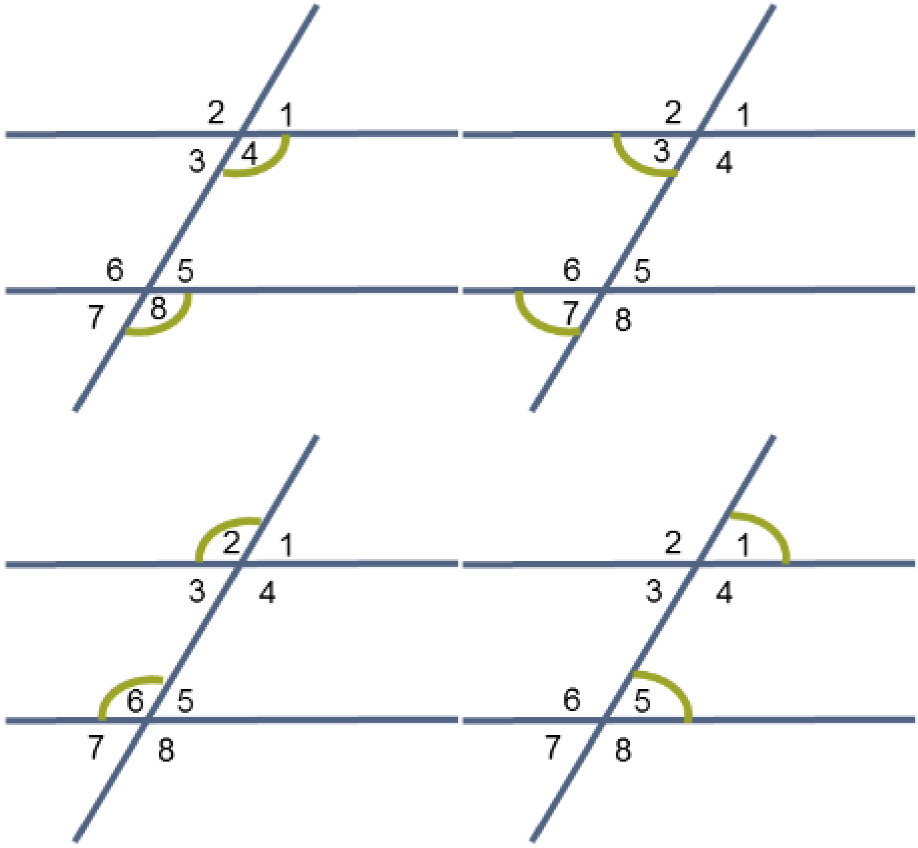
ישרים נחתכים - ישרים שיש להם נקודה משותפת אחת בדיוק.

אנך אמצעי לקטע - ישר שעובר דרך אמצע הקטע ומאונך לו.

זוג זוויות המתקבלות מחיתוך של שני ישרים ע"י ישר שלישי

זוויות מתאימות

זוויות מתאימות: שתי זוויות הנמצאות באותם צדדים של שני הישרים ובאותו צד של הישר השלישי.



$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$$

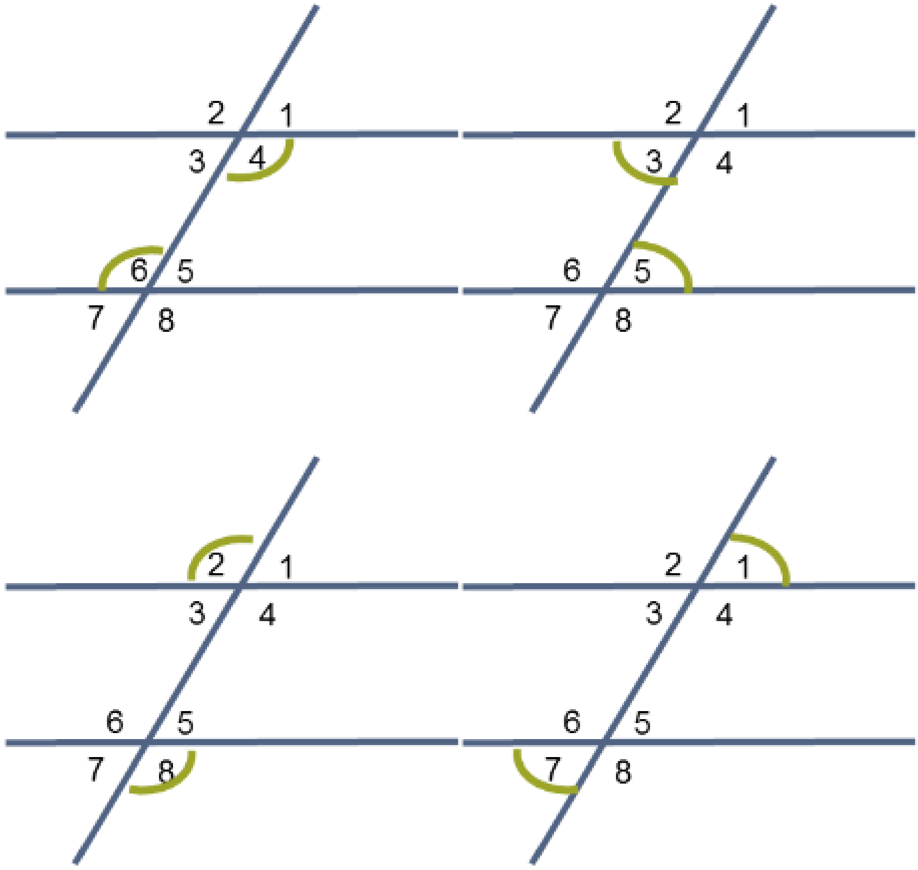
$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$$

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$$

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$$

זוויות מתחלפות

זוויות מתחלפות: שתי זוויות הנמצאות בצדדים שונים של שני הישרים ובצדדים שונים של הישר השלישי.



$$\measuredangle 1 = \measuredangle 7$$

$$\measuredangle 2 = \measuredangle 8$$

$$\measuredangle 3 = \measuredangle 5$$

$$\measuredangle 4 = \measuredangle 6$$

זוויות חד צדדיות

זוויות חד צדדיות: שתי זוויות הנמצאות בצדדים שונים של שני הישרים ובאותו צד של הישר השלישי.

משפט מרכזי: נתונים שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי.

אם קיים זוג אחד של זוויות מתאימות שוות

או זוג אחד של זוויות מתחלפות שוות

או זוג אחד של זוויות חד צדדיות שסכומם $180°$

אז הישרים מקבילים.

משפט הפוך: נתונים שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי.

אם שני הישרים מקבילים **אז**:

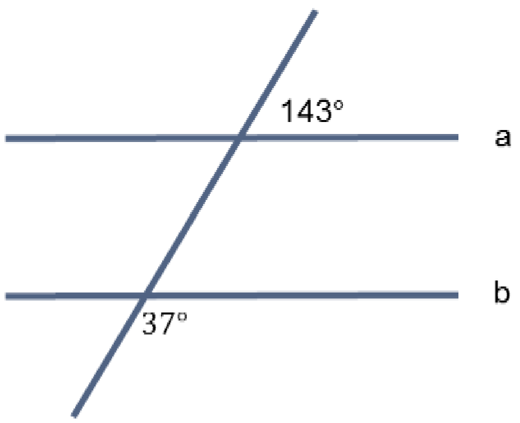
כל זוג זוויות מתחלפות וכל זוג זוויות מתאימות שוות

וכל זוג זוויות חד צדדיות משלימות $180°$.

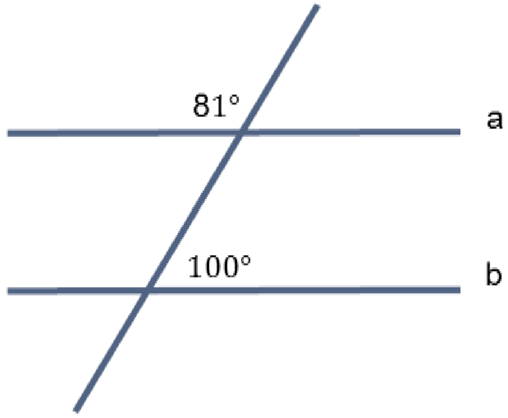
תרגיל

מצא האם הישרים מקבילים:

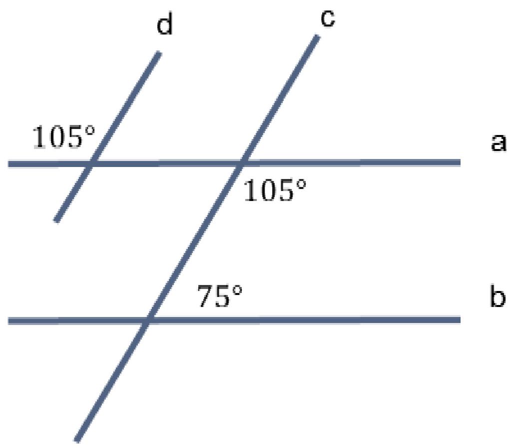
א.



ב.



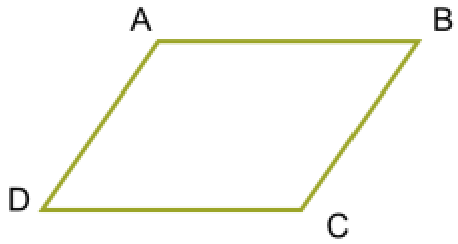
ג.



משפחת המרובעים

מקבילית

מרובע שכל שתי צלעות נגדיות שלו מקבילות.



נתון: $ABCD$ מקבילית

טענת המשפט: $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$

משפט (26)

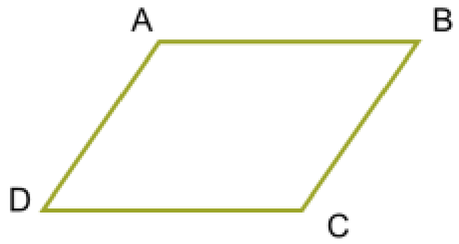
במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.

נתון: $ABCD$ מקבילית $AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

טענת המשפט: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

$\sphericalangle B = \sphericalangle D$

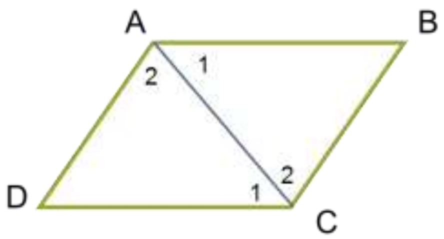


תרגיל

הוכח את המשפט: במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו. (הזוויות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו)

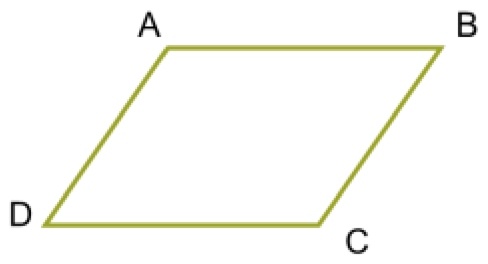
נתון: $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

צ"ל: $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$



משפט הפוך למשפט (26) משפט (29)

מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שווה הוא מקבילית.



נתון: $\measuredangle A = \measuredangle C$

$\measuredangle B = \measuredangle D$

טענת המשפט: $AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

$ABCD$ מקבילית

<u>תרגיל</u>

הוכח את המשפט: מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שווה הוא מקבילית.

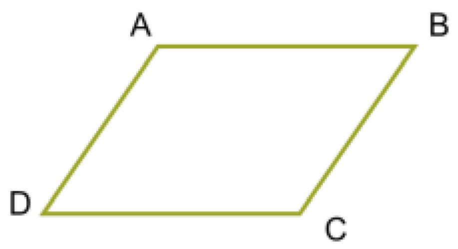
(אם במרובע שני הזוגות של הזוויות הנגדיות שוות זו לזו, אז המרובע הוא מקבילית)

<u>**נתון:**</u> $\measuredangle B = \measuredangle D$, $\measuredangle A = \measuredangle C$

<u>**צ"ל:**</u> $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

<u>משפט (27)</u>

במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.



נתון: $ABCD$ מקבילית $AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

טענת המשפט: $AB = DC$

$AD = BC$

<u>תרגיל</u>

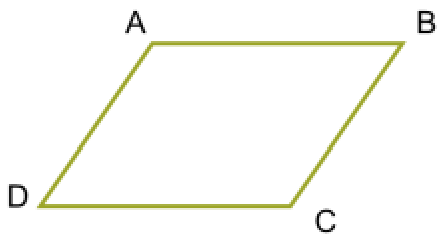
הוכח את המשפט: במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו. (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו)

<u>**נתון:**</u> $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

<u>**צ"ל:**</u> $AD = BC$, $AB = DC$

<u>משפט הפוך למשפט (27) משפט (30)</u>

מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.



נתון: $AB = DC$

$AD = BC$

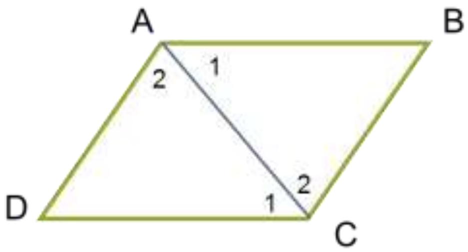
טענת המשפט: $AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

$ABCD$ מקבילית

תרגיל

הוכח את המשפט: מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.



(אם במרובע כל שני הזוגות של הצלעות הנגדיות שוות זו לזו, אז

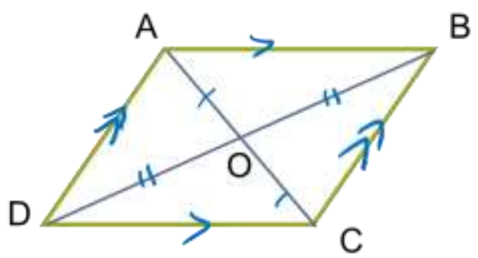
המרובע הוא מקבילית)

נתון: $AD = BC$, $AB = DC$

צ"ל: $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

משפט (28)

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.



נתון: $ABCD$ מקבילית $AB \parallel DC$

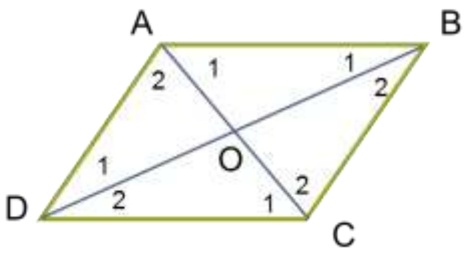
$AD \parallel BC$

טענת המשפט: $AO = OC$

$BO = OD$

תרגיל

הוכח את המשפט: במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.



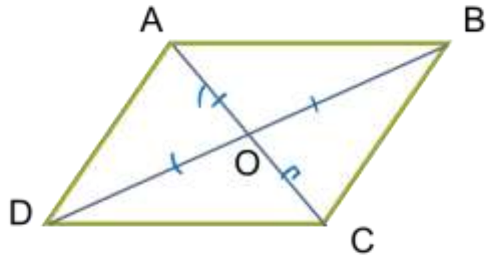
(האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה)

נתון: $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

צ"ל: $BO = OD$, $AO = OC$

משפט הפוך למשפט (28) משפט (32)

מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.



נתון: $AO = OC$

$BO = OD$

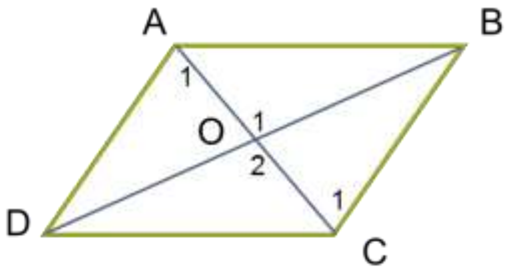
טענת המשפט: $AB \parallel DC$

$AD \parallel BC$

$ABCD$ מקבילית

תרגיל

הוכח את המשפט: מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.



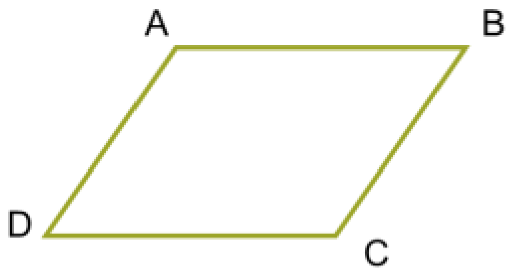
(מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית)

נתון: $BO = OD$, $AO = OC$

צ"ל: $AD \parallel BC$,$AB \parallel DC$

משפט (31)

מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.



נתון: $AB \parallel DC$

$AB = DC$

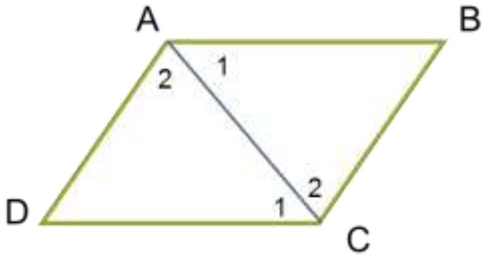
טענת המשפט: $AD \parallel BC$

$AD = BC$

$ABCD$ מבילית

<u>תרגיל</u>

הוכח את המשפט: מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.



(אם במרובע קיים זוג אחד של צלעות נגדיות שווה ומקביל, אז

המרובע הוא מקבילית)

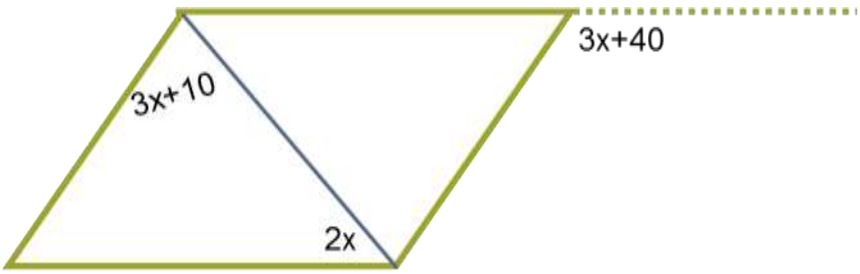
<u>נתון:</u> $AB \parallel DC$,$AB = DC$

<u>צ"ל:</u> $AD \parallel BC$ $AD = BC$

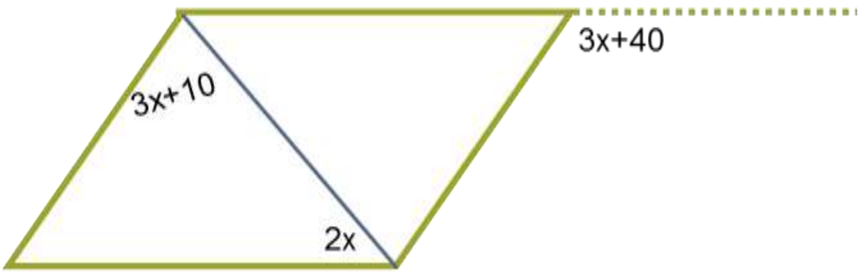
<u>תרגיל</u>

מקבילית - מצא את הזוויות המסומנות ב-x

א.

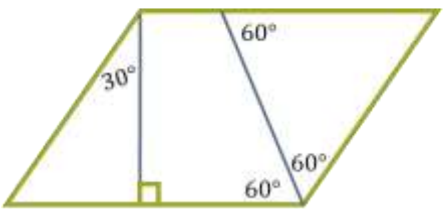


ב.



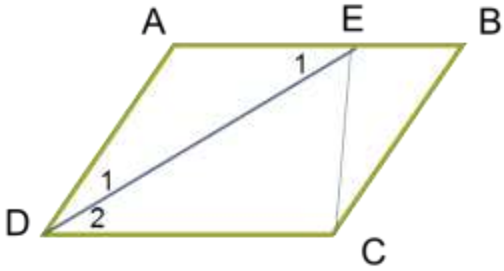
<u>תרגיל</u>

הוכח שהמרובע בציור הוא מקבילית



תרגיל

במקבילית ABCD, AB=2BC.



הישר DE חוצה את הזוית D וחותך את הצלע AB בנקודה E.

הוכח כי המשולש BCE הוא שווה שוקיים.

מלבן

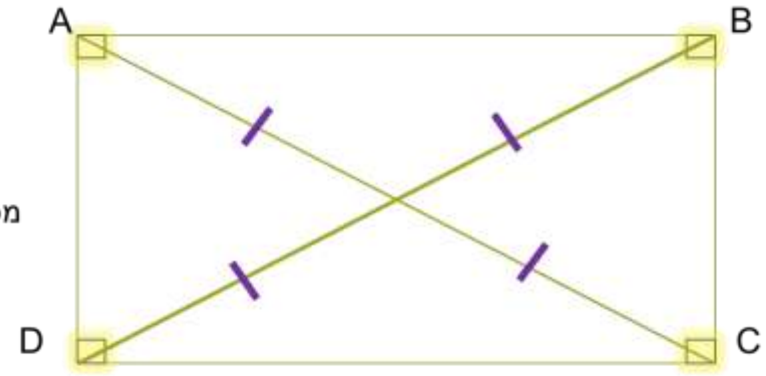
מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה

במלבן כל הזוויות ישרות

במלבן האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה

כדי שמרובע יהיה מלבן, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. מרובע שכל זוויותיו ישרות. (למעשה די בשלוש זוויות ישרות).
2. מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה.
3. מקבילית שאלכסוניה שווים

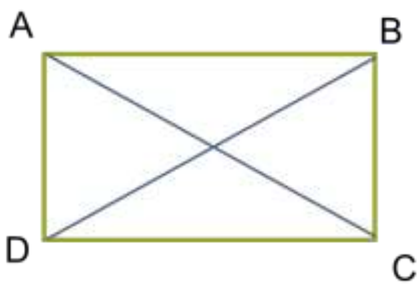


שטח מלבן :

מכפלת צלעות סמוכות

משפט (37)

אלכסוני המלבן שווים זה לזה.



נתון: מלבן $ABCD$ $AB \parallel DC$

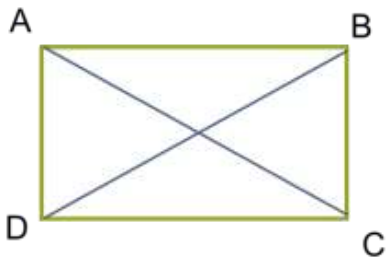
$AD \parallel BC$

$\sphericalangle A = 90°$

טענת המשפט: $AC = DB$

תרגיל

הוכח את המשפט: אלכסוני המלבן שווים זה לזה.

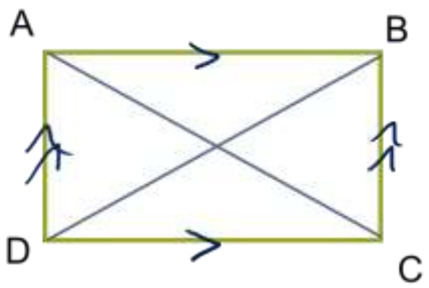


נתון: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $\sphericalangle A = 90°$

צ"ל: $AC = DB$

משפט הפוך למשפט (37) משפט (38)

מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.



נתון: $AB \parallel DC \quad AD \parallel BC$

מקבילית $ABCD$

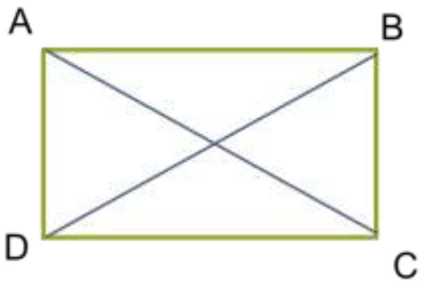
$AC = DB$

טענת המשפט:

$\sphericalangle A = 90°$

תרגיל

הוכח את המשפט: מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

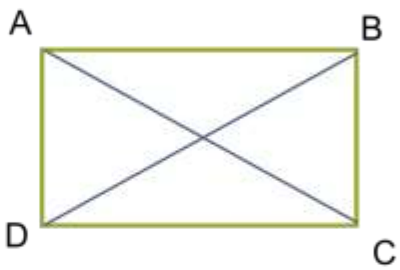


נתון: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, מקבילית ABCD $AC = DB$

צ"ל: $\sphericalangle D = 90°$

משפט (86)

במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר



נתון: $AB \parallel DC \quad AD \parallel BC$

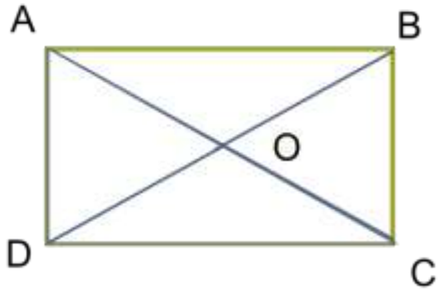
מקבילית $ABCD$

$AC = DB$

טענת המשפט:

$\sphericalangle A = 90°$

תרגיל



הוכח את המשפט: במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר

נתון: $\sphericalangle D = 90°$, $AO = OC$

צ"ל: $DO = AO = OC$

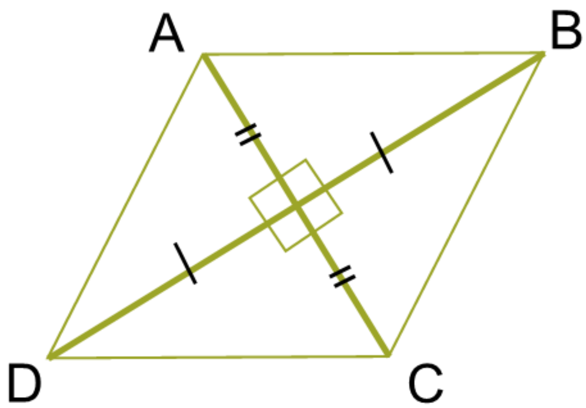
מעוין

מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו

- במעוין כל הצלעות שוות
- במעוין כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו
- במעוין סכומן של כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$
- במעין האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.

כדי שמרובע יהיה מעוין, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. מרובע שכל צלעותיו שוות . $AB = BC = CD = AD$
2. מקבילית ששתי צלעותיה הסמוכות שוות .
3. מקבילית שאלכסוניה מאונכים.
4. מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית אחת.



שטח מעוין: מחצית מכפלת האלכסונים

ריבוע

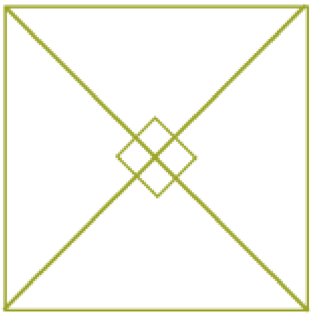
מלבן ששתיים מצלעותיו הסמוכות שוות

מעוין שאחת מזוויותיו ישרות

- בריבוע כל הזוויות שוות
- בריבוע כל הצלעות שוות
- בריבוע האלכסונים: חוצים זה את זה ושווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע

כדי שמרובע יהיה ריבוע, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. מרובע שכל צלעותיו וזוויותיו שוות .
2. מלבן שאלכסוניו מאונכים זה לזה, או שאחד מאלכסוניו חוצה זווית אחת.
3. מעוין שאלכסוניו שווים זה לזה.
4. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה, שווים זה לזה, ומאונכים זה לזה.
5. מקבילית שאלכסוניו מאונכים זה לזה ושווים זה לזה.



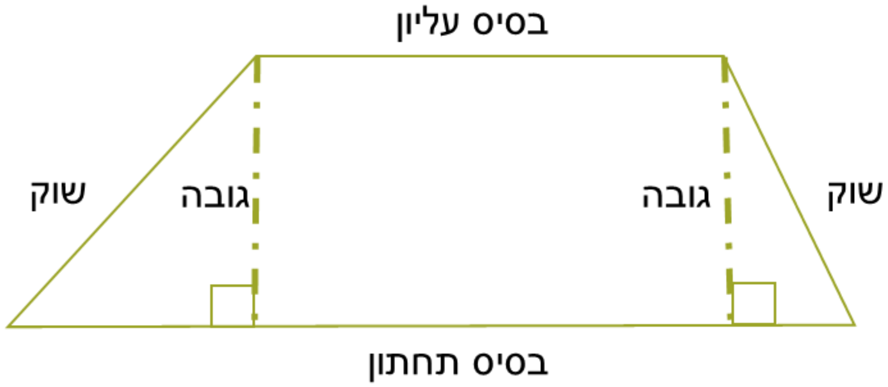
טרפז

מרובע שבו רק שתיים מן הצלעות הנגדיות הן מקבילות

סכום שתי הזוויות שליד כל שוק בטרפז הוא $180°$

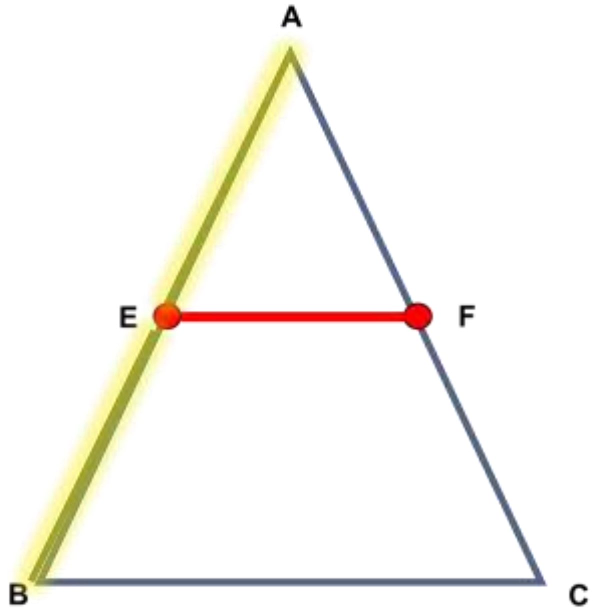
כדי שמרובע יהיה טרפז, עליו לקיים את התנאי הבא:

רק שתיים מן הצלעות הנגדיות הן מקבילות



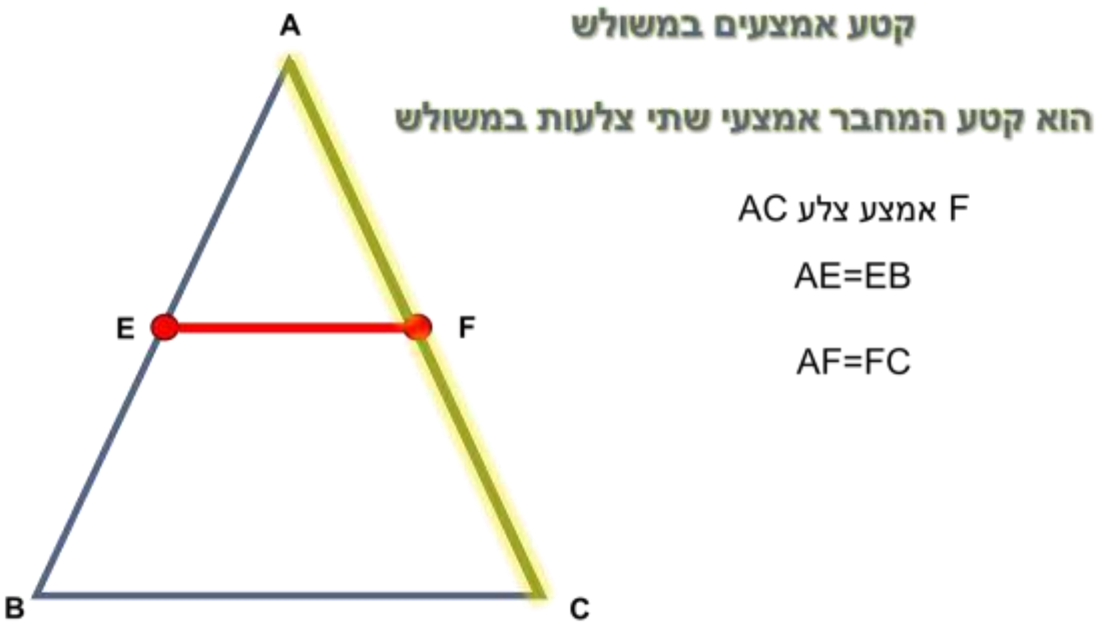
קטע אמצעים במשולש

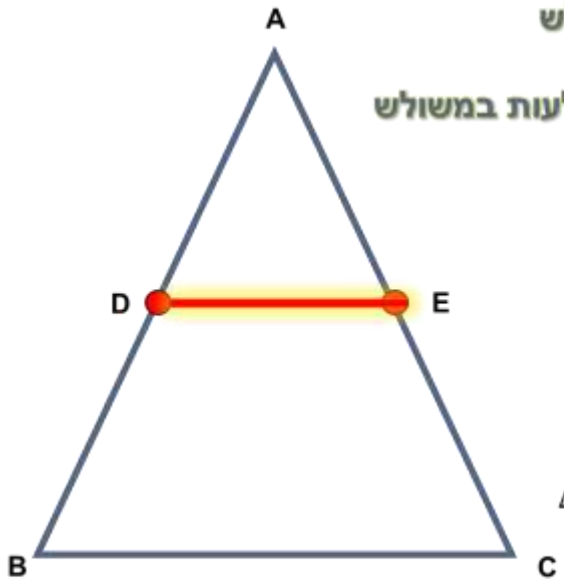
קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש



E אמצע צלע AB

AE=EB





קטע אמצעים במשולש

הוא קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש

AD=DB

AE=EC

$\Downarrow$

DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC

<u>תכונות קטע אמצעים במשולש</u>

א. מחבר אמצע צלע אחת במשולש.

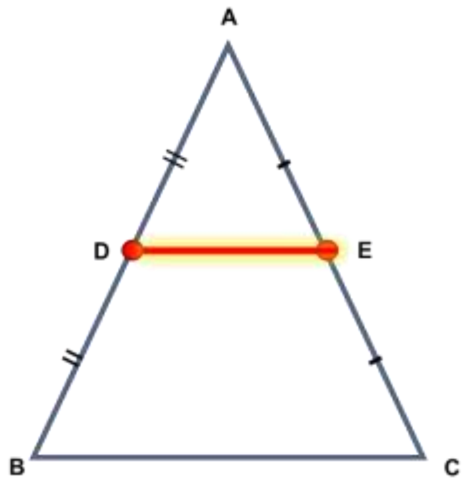
ב. מחבר אמצע צלע שנייה במשולש.

ג. מקביל לצלע שלישית במשולש.

ד. שווה באורכו למחצית אורך הצלע השלישית

<u>תרגיל</u>

<u>נוכיח את המשפט:</u> קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.



<u>נתון</u>: ΔABC משולש כלשהו.

AD=DB (D אמצע הצלע AB)

AE=EC (E אמצע הצלע AC)

<u>צ"ל</u>:

(א) $DE \parallel BC$

(ב) $DE = \frac{1}{2}BC$

<u>תרגיל</u>

קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

<u>נתון</u>: ΔABC משולש כלשהו.

AD=DB (D אמצע הצלע AB)

AE=EC (E אמצע הצלע AC)

<u>צ"ל</u>:

(א) $DE \parallel BC$

(ב) $DE = \frac{1}{2}BC$

<u>תרגיל</u>

קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

<u>נתון</u>: ΔABC משולש כלשהו.

AD=DB (D אמצע הצלע AB)

AE=EC (E אמצע הצלע AC)

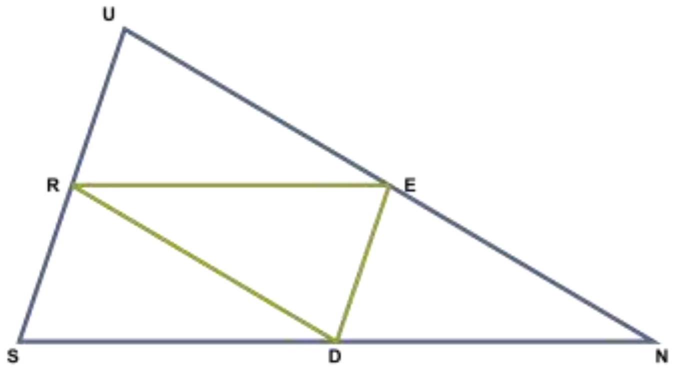
<u>צ"ל:</u>

א) $DE \parallel BC$

ב) $DE = \frac{1}{2}BC$

<u>תרגיל</u>

כמה קטעים אמצעיים אפשר להעביר בכל משולש?



<u>תרגיל</u>

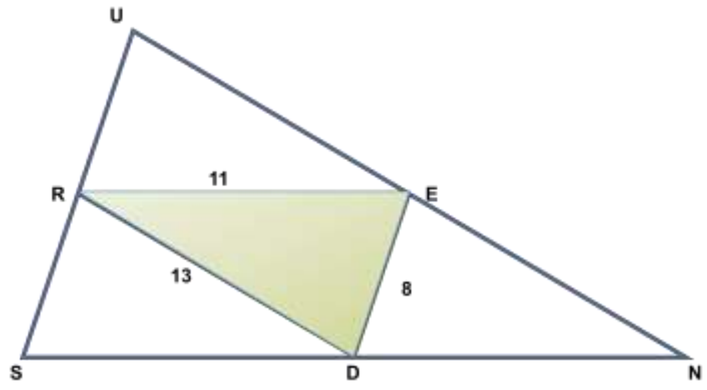
הנקודות R , E , D הן אמצעי הצלעות של משולש ΔSUN.

RE = 11 ס"מ , RD = 13 ס"מ, ED = 8 ס"מ.

(1) מצא את אורכי הצלעות של המשולש SUN

(2) אתם מזהים משהו מיוחד בהיקפים?

מהו הקשר בין היקפי המשולשים RED ומשולש SUN?



תכונות של קטע אמצעים

משפט הפוך(1)

קטע החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית

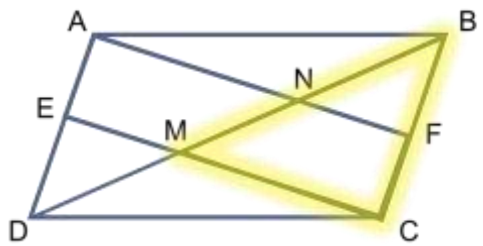
משפט הפוך(2)

קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים

תרגיל

E ו- F הן אמצעי הצלעות AD ו- BC במקבילית ABCD.

הוכח: DM=MN=BN



לסיכום

כדי להוכיח שקטע החותך שתי צלעות משולש הוא קטע אמצעים,

מספיק להוכיח שמתקיים אחד מהתנאים הבאים:

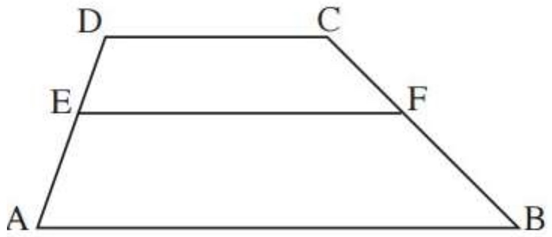
<u>הקטע חוצה שתי צלעות של המשולש</u>

<u>הקטע מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה</u>

<u>הקטע חוצה את אחת הצלעות ומקביל לצלע השלישית</u>.

(1) גאומטריה במישור בגרות קיץ 2007 שאלון 005

ישר , המקביל לבסיסים של טרפז ABCD , חותך את שוקי הטרפז בנקודות E ו- F (ראה ציור)



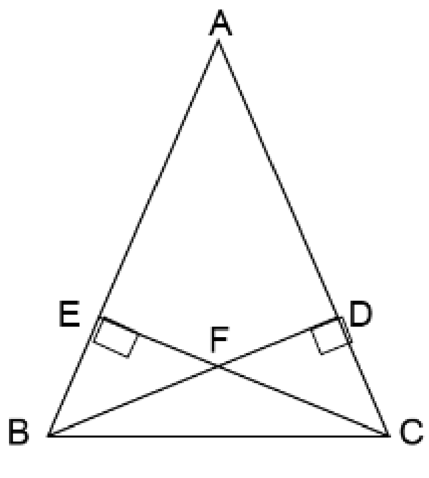
נתון : AB = 25 ס"מ , DC = 11 ס"מ , $\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$.

א. חשב את האורך של ED

ב. חשב את היחס שבין שטח הטרפז EFCD ובין שטח הטרפז ABFE . הסבר את חישוביך.

(2) גאומטריה במישור בגרות קיץ מועד ב' 2004 שאלון 005

במשולש ABC הגבהים BD ו- CE נפגשים בנקודה F (ראה ציור)



נתון: BD = CE :

הוכח:

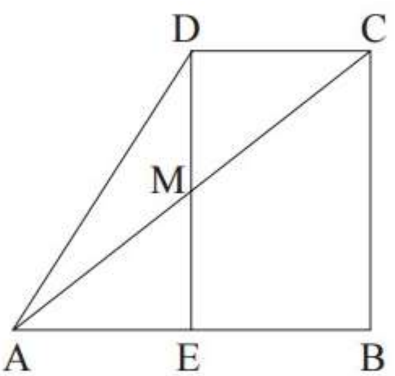
א. המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

ב. FC = BF .

ג AD = AE .

(3) גאומטריה במישור בגרות קיץ מועד א' 2005 שאלון 005

ABCD הוא טרפז ישר זווית. ($\sphericalangle B = 90°$)



האלכסון AC חותך את גובה הטרפז DE בנקודה M. (ראה ציור) . נתון DM=ME

א. הוכח כי . EB = AE

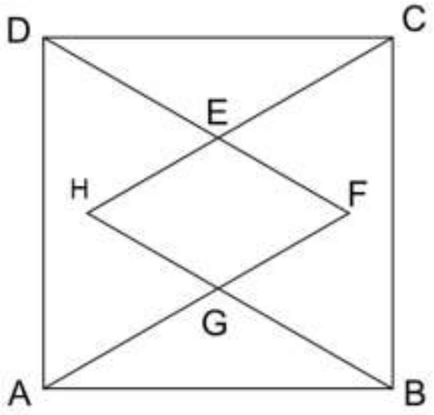
ב. האנך מ B -לאלכסון AC חותך את האלכסון בנקודה G.

הוכח כי . EB = GE

(4) גאומטריה במישור בגרות קיץ מועד ב' 2007 שאלון 005

על צלעות הריבוע ABCD בנו משולשים שווי – צלעות AFD ו-BHC -

הצלעות CH ו DF -נחתכות בנקודה E, הצלעות BH ו AF -נחתכות בנקודה G (ראה ציור)



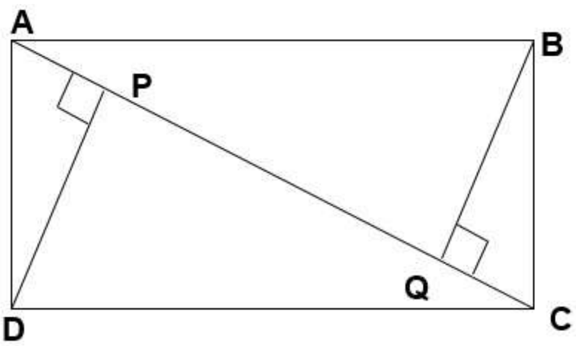
נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. הוכח כי המרובע HEFG הוא מעוין.

ב. חשב את האורך של הגובה לצלע AB במשולש ABG.

(5) גאומטריה במישור בגרות קיץ מועד ב' 2005 שאלון 005

במלבן ABCD הקטעים BQ ו DP -מאונכים לאלכסון AC (ראה ציור)



הוכח:

א. משלושים דומים APD~BQA :

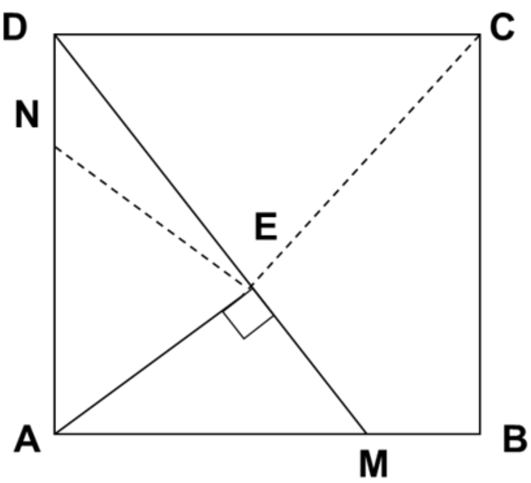
ב. BQ^2=AP*AQ

(6) גאומטריה במישור בגרות קיץ מועד ב' 2007 שאלון 005

בריבוע ABCD הנקודה M נמצאת על הצלע AB,

והנקודה N נמצאת על הצלע AD, כך ש. ND = MB -

AE הוא אנך ל MD -ראה ציור.)



נתון: 1 ס"מ, ND = MB =

האורך של צלע הריבוע הוא 4 ס"מ.

א. חשב:

(1) את האורך של MD.

(2) את האורך של DE, ואת האורך של AE.

ב. הוכח כי המשולשים דומים AEN~DEC. היעזר בסעיף א'

<u>מעגל</u>

<u>מושגי יסוד 1</u>

מעגל אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה.

עיגול הוא השטח התחום בתוך המעגל:

מרכז המעגל היא הנקודה הקבוע

רדיוס קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שעל המעגל נקרא רדיוס או מחוג.

(נסמנו ב- R)

מיתר - קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל

קוטר - קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל ועובר דרך נקודת מרכז המעגל.

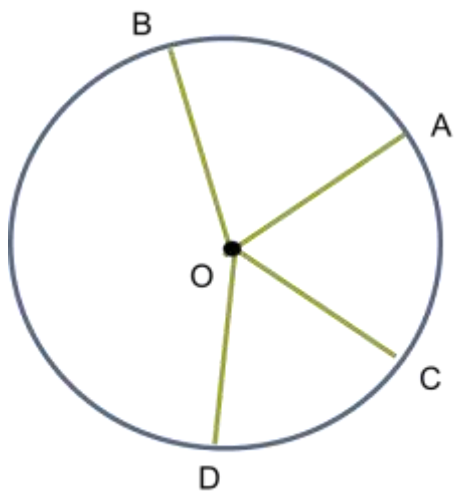
מיתר העובר דרך מרכז המעגל

קשת - חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות שעליו.

בשרטוט מצוינת לדוגמה הקשת $\widehat{BA}$

<u>מושגי יסוד 2</u>

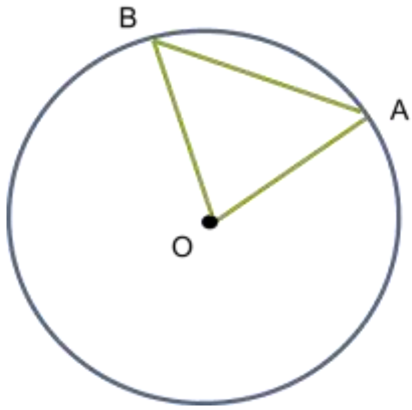
<u>**זווית מרכזית**</u> זווית שהקדקוד שלה הוא במרכז המעגל ושוקיה הם רדיוסים.



$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle BOA$ הן זוויות מרכזיות

לכל זוית מרכזית מתאימים קשת ומיתר ולהפך.

$\sphericalangle BOA$ זווית מרכזיות המתאימה לקשת $\widehat{BA}$ ולמיתר BA



<u>קשת</u>

הקשת היא חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות

סימון לקשת: $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$

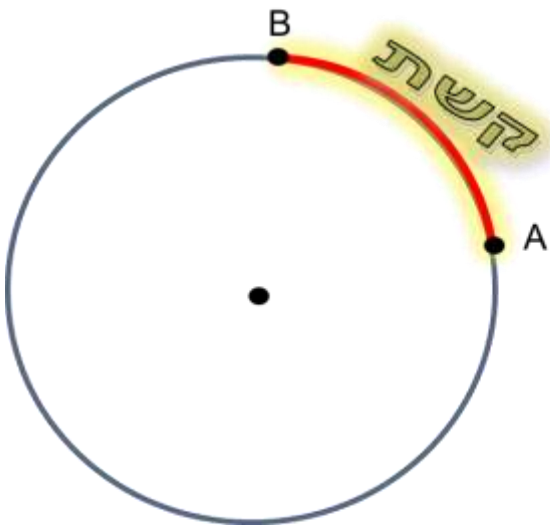
אם נרשום : $\widehat{BA} = 10$

הכוונה **<u>שאורך הקשת</u>** היא 10 ס"מ

אם נרשום : $\widehat{BA} = 70°$

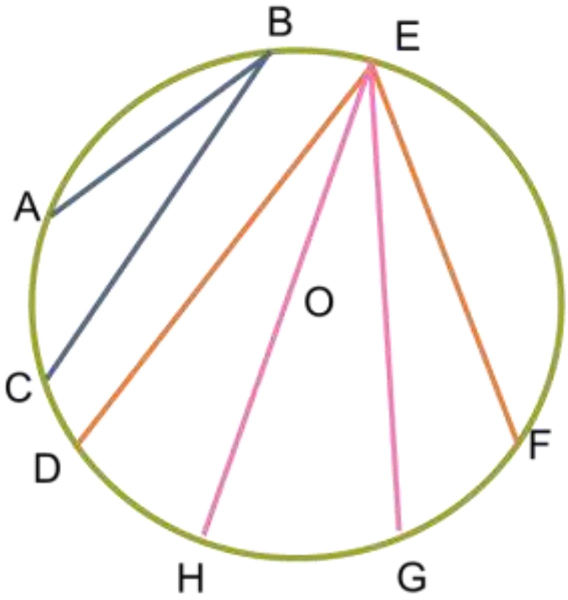
הכוונה **<u>לגודל הזווית המרכזית</u>** הנשענת על הקשת AB

<u>גודל הקשת</u> (להבדיל מאורך הקשת) כגודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת



<u>זווית היקפית</u>

זווית שקדקודה הוא נקודה על המעגל ושוקיה הם מיתרים במעגל.



$\sphericalangle ABC,\ \ \sphericalangle DEF,\ \ \sphericalangle HEG$ הן זוויות היקפיות

זוית היקפית $\sphericalangle ABC$ נשענת על הקשת $\widehat{AC}$

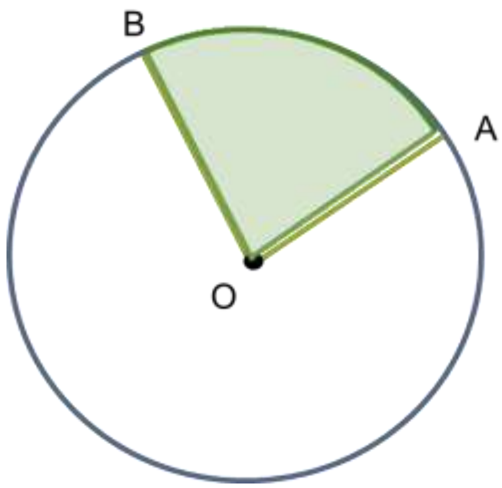
זוית היקפית $\sphericalangle HEG$ נשענת על הקשת $\widehat{HG}$

זוית היקפית $\sphericalangle DEF$ נשענת על הקשת $\widehat{DF}$

<u>גזרה</u>

חלק מהעיגול המוגבל על ידי שני רדיוסים והקשת שביניהם.

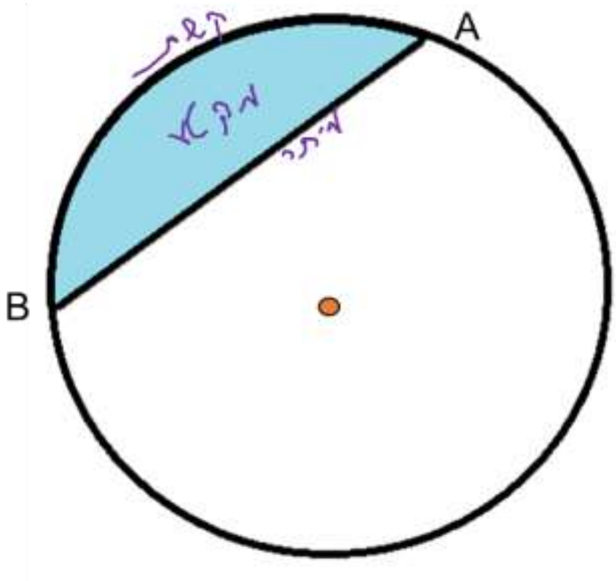
בשרטוט מצוינת לדוגמה הגזרה AOB



<u>מקטע</u>

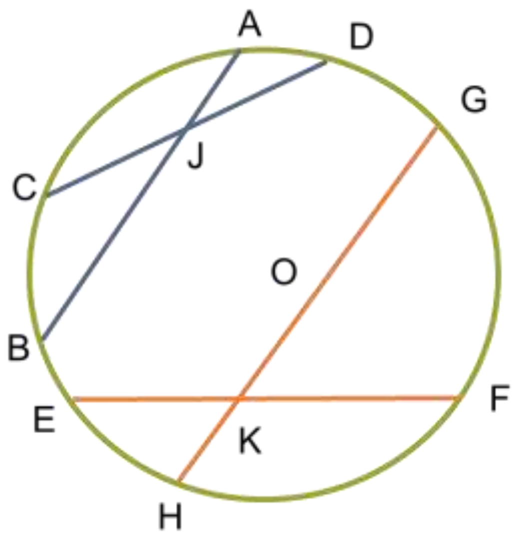
חלק מהעיגול המוגבל על ידי מיתר והקשת השייכת לו.

בשרטוט מצוין לדוגמה המקטע השייך לקשת $\widehat{BA}$



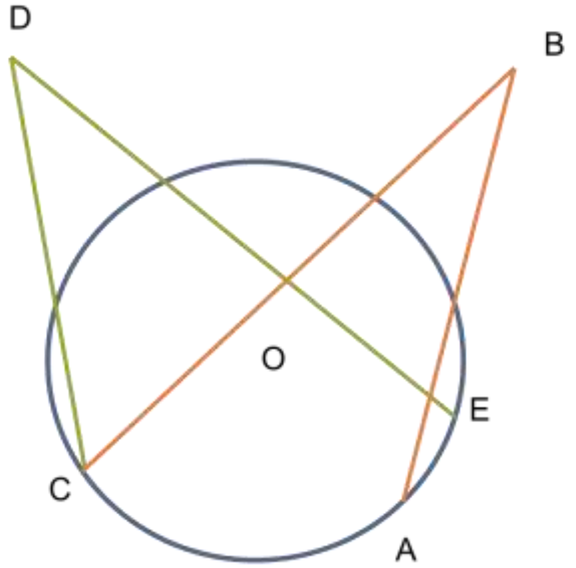
<u>זווית פנימית</u>

זוית הנוצרת על ידי שני מיתרים במעגל הנחתכים בתוך העיגול.



<u>זווית חיצוניות</u>

זוית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל.



$\sphericalangle ABC$

$\sphericalangle CDE$

הן זוויות חיצוניות

מיקום נקודה ביחס למעגל

כל מעגל מחלק את המישור לשלושה חלקים:

הנקודות שבתוך המעגל – כל הנקודות שמרחקן מהמרכז קטן מהרדיוס.

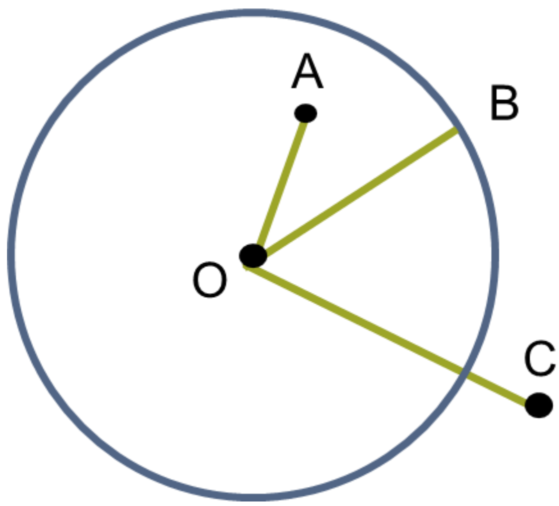
(בציור הנקודה A כי OA<R)

הנקודות שעל המעגל – כל הנקודות שמרחקן מהמרכז שווה לרדיוס.

(בציור הנקודה B כי OB=R)

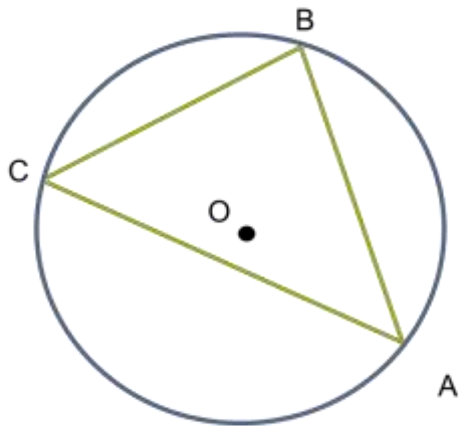
הנקודות שמחוץ למעגל – כל הנקודות שמרחקן מהמרכז גדול מהרדיוס.

(בציור הנקודה C כי OC>R)

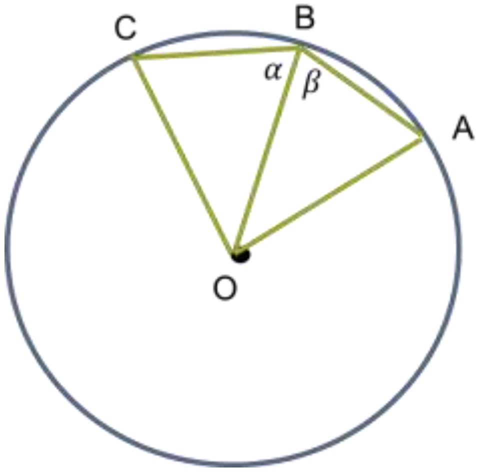


משפט 60

דרך שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד



מרכז המעגל הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש ש-3 הנקודות הן הקדקודים שלו.

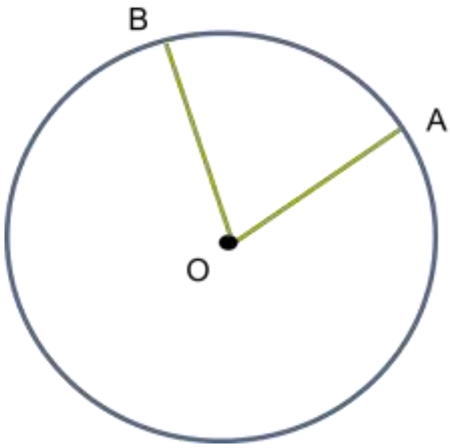


נוכיח שהזוית $\alpha+\beta<180°$ ולכן הנקודות A , B ו- C לא נמצאות על ישר אחד, אחרת $\alpha+\beta=180°$ זווית שטוחה.

משפט 61

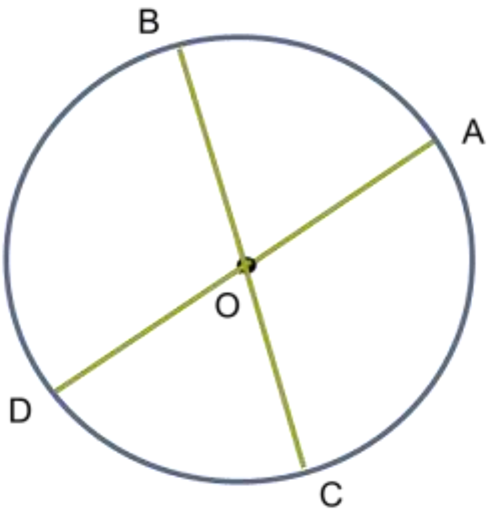
זווית מרכזית - זווית שהקדקוד שלה הוא מרכז המעגל ושוקיה הם שני רדיוסים.

$\sphericalangle BOA$ זוויות מרכזיות



שני רדיוסים היוצאים ממרכז המעגל, אשר לא נמצאים על אותו קוטר יוצרים שתי זוויות מרכזיות – האחת קטנה מ 180 מעלות והשנייה גדולה מ 180 מעלות.

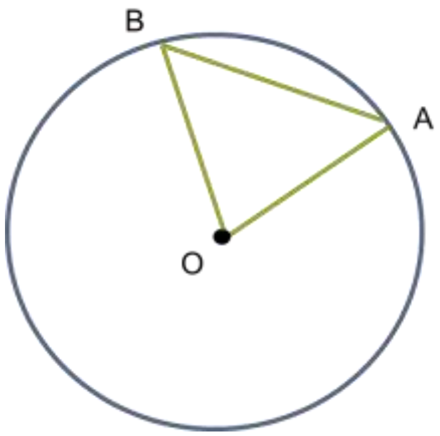
בציור הבא:



AC ו- AD קוטר במעגל - קוטר יוצר שתי זוויות מרכזיות בנות 180^{o} (זווית שטוחה)

$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle BOA$ הן זוויות מרכזיות

לכל זוית מרכזית מתאימים קשת ומיתר ולהפך:



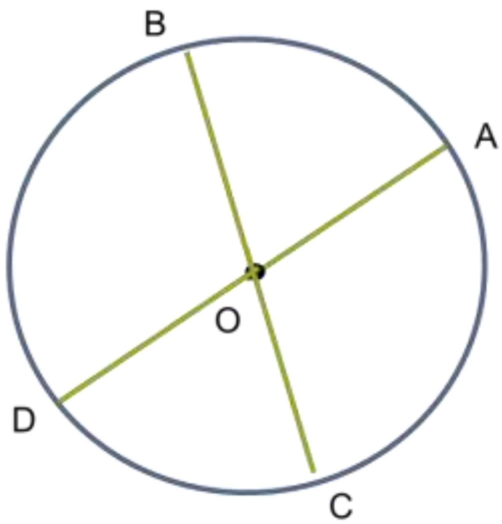
$\measuredangle BOA$ זווית מרכזית המתאימה לקשת $\widehat{BA}$ ולמיתר BA

נאמר שהזווית נשענת על הקשת ועל המיתר.

אם הקשת AB היא בת $80°$ אז הזווית המרכזית הנשענת על הקשת היא בת $80°$.

<u>משפט 61</u> - במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

במילים אחרות, לזוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות ולהפך



<u>אם</u> - $\measuredangle AOB = \measuredangle DOC$ הן זוויות מרכזיות שוות

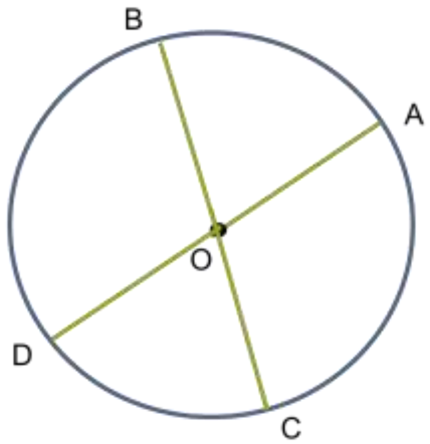
<u>אז</u> - $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ הן קשתות שוות

<u>תרגיל</u>

חשב את גודל הזווית המרכזת הנשענת על קשת שמהווה $\frac{17}{36}$ מהיקף המעגל?

משפט הפוך ל- 61: זווית מרכזית

לקשתות שוות זויות מרכזיות שוות



<u>אם</u> - $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ הן קשתות שוות

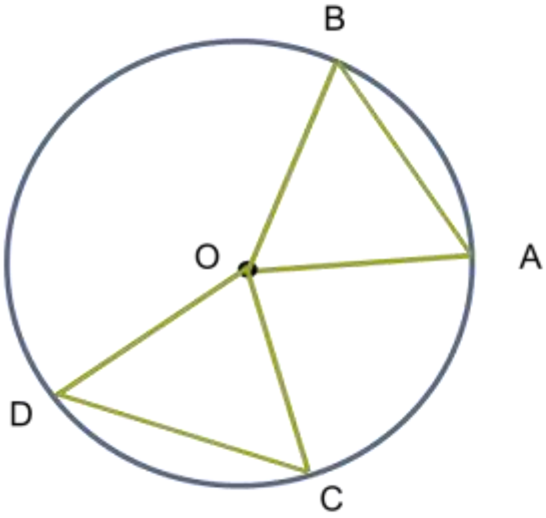
<u>אז</u> - $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$ הן זוויות מרכזיות שוות

משפט 62: זווית מרכזית ומיתרים

על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות

$AB = DC$ הם מיתרים שווים

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$ הן זוויות מרכזיות שוות



תרגיל

הוכח את המשפט: על מיתרים שווים נשענו זוויות מרכזיות שוות

נתון: מעגל O , AB=CD

צ"ל : $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$

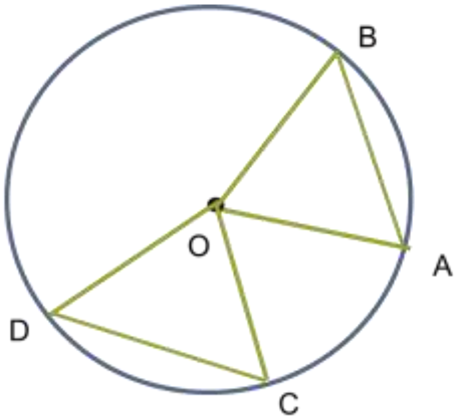
משפט הפוך ל- 62: זווית מרכזית ומיתרים

במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

במילים אחרות, זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC$ הן זוויות מרכזיות שוות

$AB = DC$ הם מיתרים שווים



תרגיל

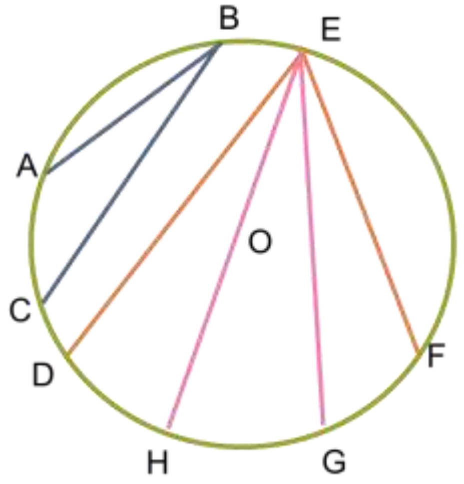
הוכח את המשפט ההפוך: זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים

נתון: מעגל O , $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$

צ"ל : AB=CD

משפט 69: זווית היקפית

זווית שקדקודה הוא נקודה על המעגל ושוקיה הם מיתרים במעגל.



$\sphericalangle ABC, \sphericalangle DEF, \sphericalangle HEG$ הן זוויות היקפיות

זוית היקפית $\sphericalangle ABC$ נשענת על הקשת $\widehat{AC}$

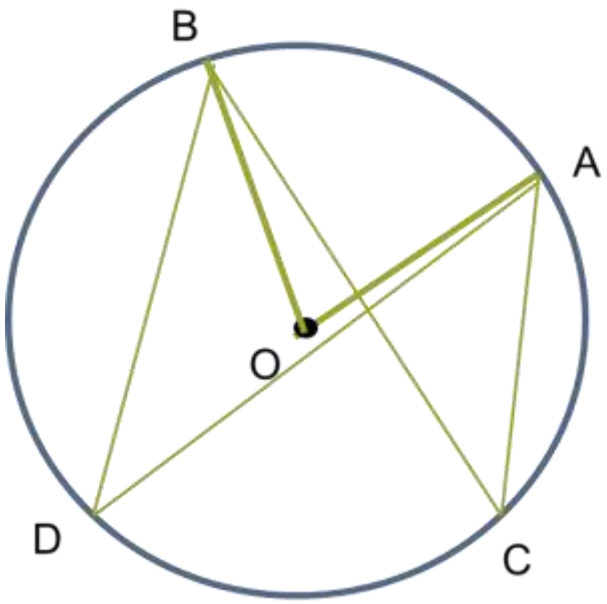
זוית היקפית $\sphericalangle HEG$ נשענת על הקשת $\widehat{HG}$

זוית היקפית $\sphericalangle DEF$ נשענת על הקשת $\widehat{DF}$

זווית מרכזית והיקפית הנשענות על אותה קשת

יש זוית מרכזית **אחת** הנשענת על קשת $\widehat{AB}$

ויש **אינסוף** זויות היקפיות הנשענות על קשת $\widehat{AB}$



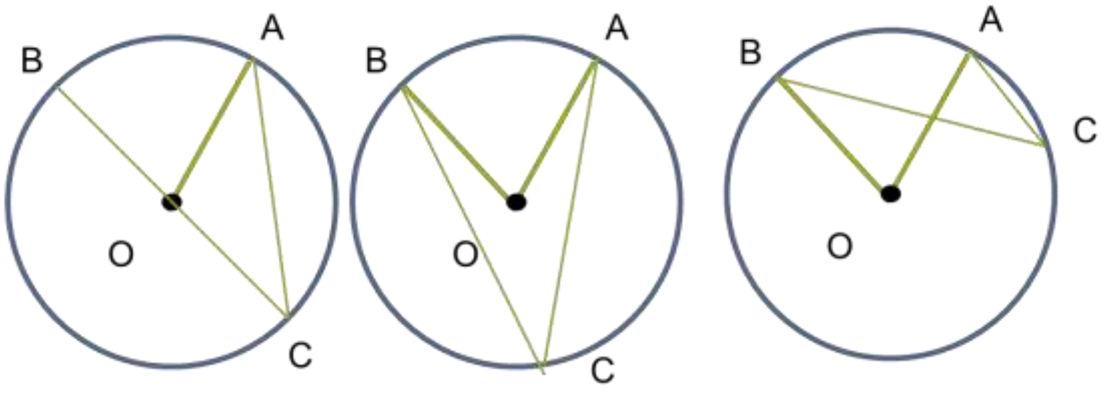
משפט 69: זווית מרכזית והיקפית הנשענות על אותה קשת

במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

במילים אחרות, זוית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית היקפית הנשענת על אותה הקשת

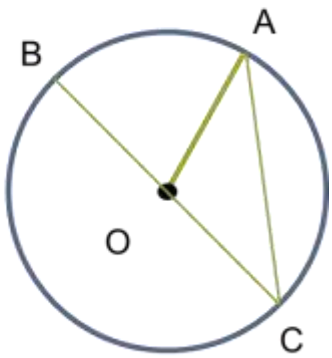
$$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA$$

נבחין בין שלושה מקרים:



<u>תרגיל</u>

הוכח את המשפט: מקרה א'



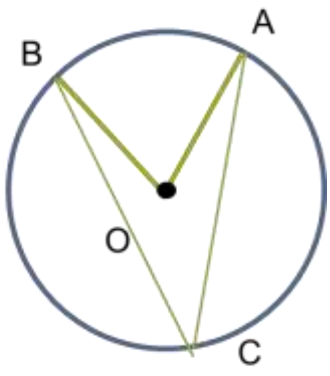
הזווית המרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית הקפית הנשענת על אותה קשת.

נתון: מעגל O

צ"ל $\sphericalangle BOA = \sphericalangle 2BCA$

<u>תרגיל</u>

הוכח את המשפט: מקרה ב'



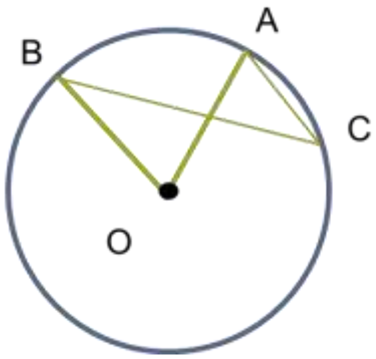
הזווית המרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית הקפית הנשענת על אותה קשת.

נתון: מעגל O

צ"ל $\measuredangle BOA = \measuredangle 2BCA$

תרגיל

הוכח את המשפט: מקרה ג'



הזווית המרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית הקפית הנשענת על אותה קשת.

נתון: מעגל O

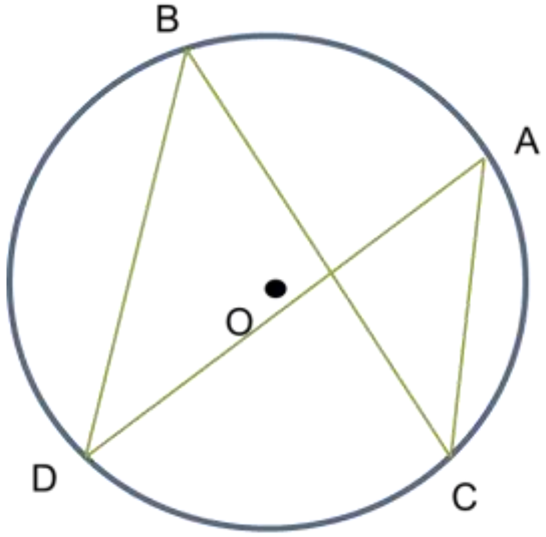
צ"ל $\measuredangle BOA = \measuredangle 2BCA$

זווית היקפית וגודלה של הקשת במעלות

קשת במעגל (במעלות) גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת עליה.

$$\widehat{BA} = 72°$$

$$\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA = \frac{72°}{2} = 36°$$

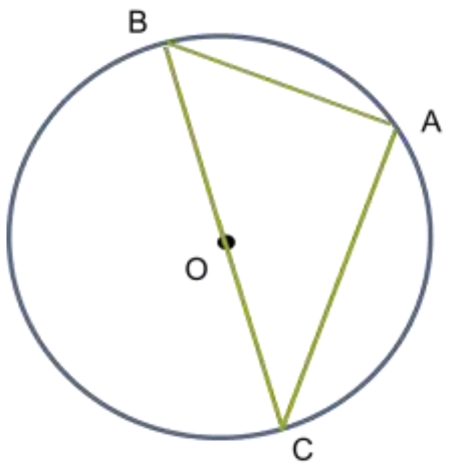


משפט 73: זווית היקפית

זוית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זוית ישרה

משפט 74 הפוך למשפט 73: זווית היקפית

זוית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר.



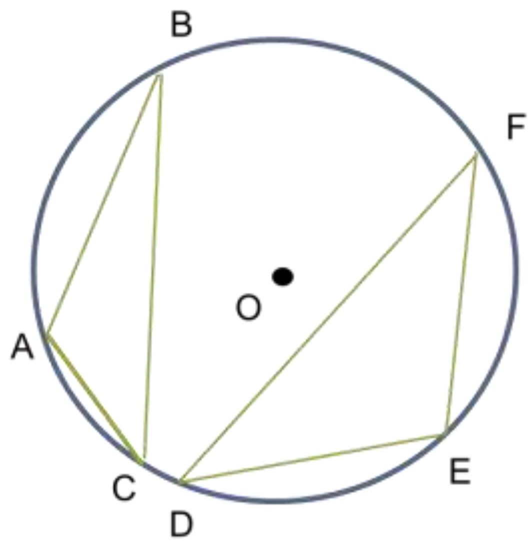
זוויות היקפיות הנשענות על קשתות ומיתרים

משפט 70 : זויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים

זויות היקפיות שוות במעגל נשענות על מיתרים שווים וקשתות שוות.

נתון: $AB = FE$

צ"ל: $\sphericalangle C = \sphericalangle D$



משפט 71: זויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות

במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

נתון: $\widehat{AB} = \widehat{FE}$

צ"ל: $\sphericalangle C = \sphericalangle D$

תרגיל:

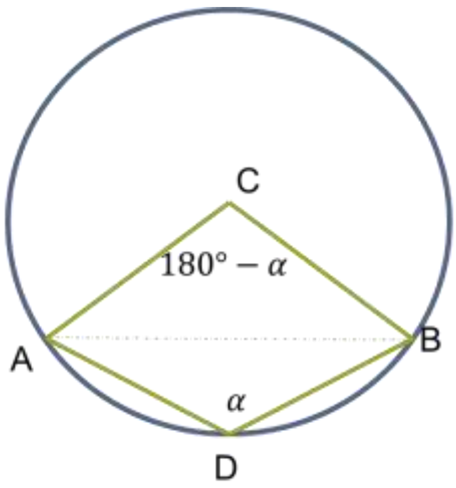
הוכח את המשפט: כל הזויות ההקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו

משפט 72: זויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים

במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו.

זויות היקפיות הנשענות על מיתר מצדדים שונים

סכום זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר מצדדים שונים של המיתר שווה ל- $180°$

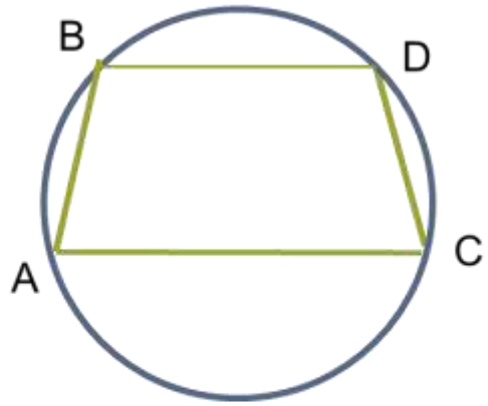


תרגיל

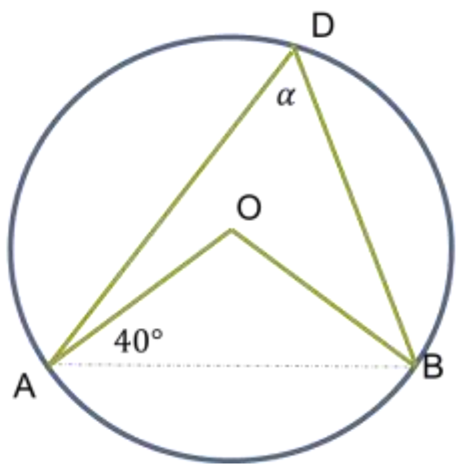
BD ו- AC הם שני מיתרים במעגל.

נתון: BD || AC.

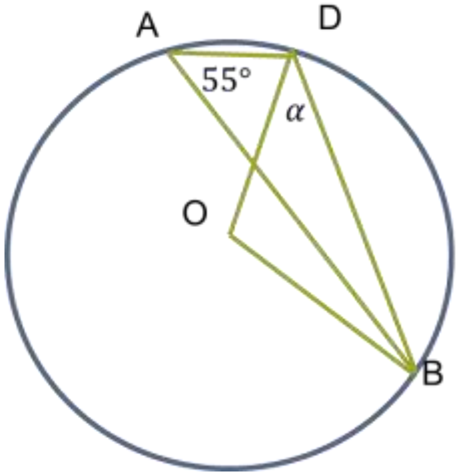
הוכח: AB=DC



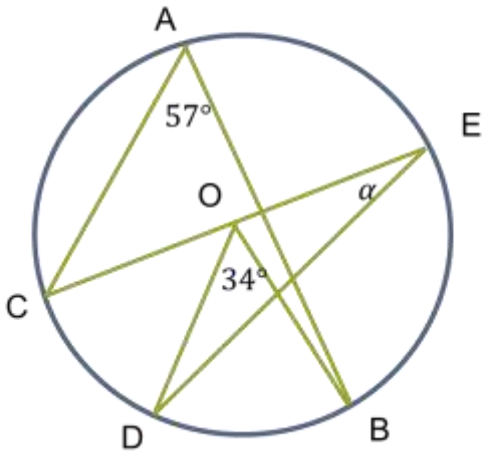
מצא את α



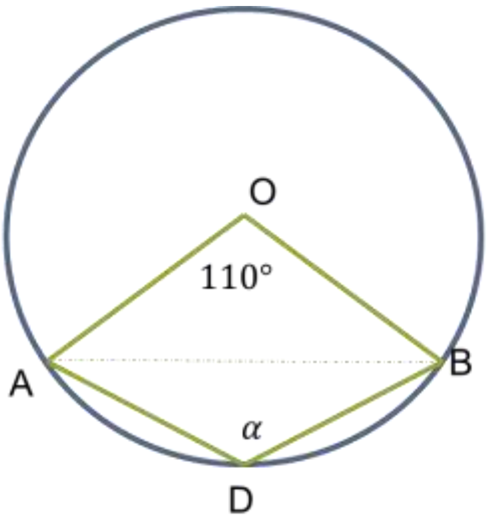
מצא את α



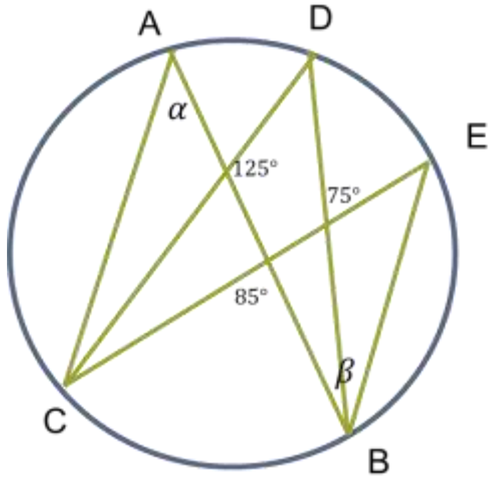
מצא את α



מצא את α

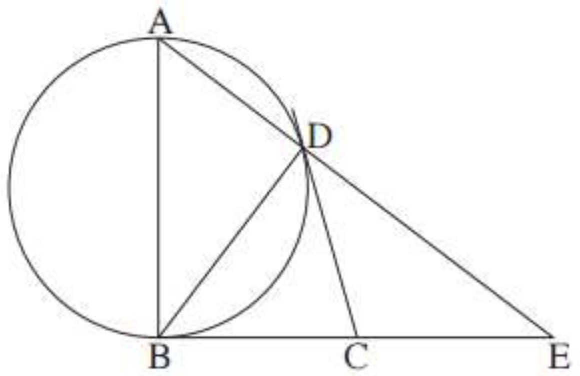


מצא את α,β



(1) **<u>גאומטריה של המישור פתרון שאלה 4 בגרות חורף 2014 שאלון 481/804</u>**

<u>בגרות חורף 2014 שאלון 804/481</u>



CB ו- CD הם שני משיקים למעגל. AB הוא קוטר במעגל זה.

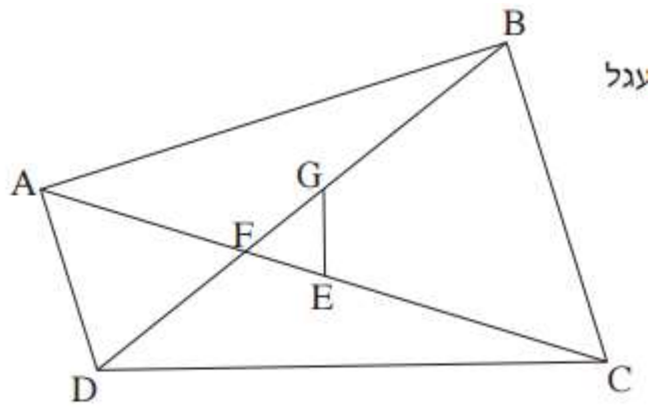
המשך AD והמשך BC נפגשים בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle E$

ב. הוכח כי $BD^2 = AD \cdot DE$

ג. הוכח כי DC הוא תיכון במשולש BDE.

(2) **<u>גאומטריה של המישור פתרון שאלה 4 בגרות קיץ 2014 מועד א' שאלון 481/804</u>**



F היא נקודת החיתוך של האלכסונים במרובע ABCD.

הנקודה E נמצאת על FC, והנקודה G נמצאת על FB, באופן שהמרובע BCEG הוא בר-חסימה במעגל (ראה ציור).

א. הוכח: $\Delta FEG \sim \Delta FBC$

ב. נתון: $\frac{DF}{FE} = \frac{AF}{FG}$. הוכח: $\Delta FDA \sim \Delta FEG$.

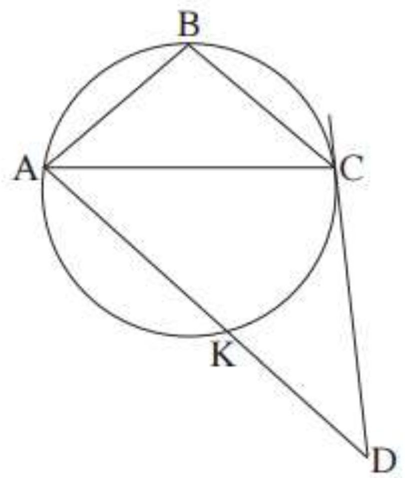
ג. הוכח: $AD \parallel BC$

(3) **<u>גאומטריה של המישור פתרון שאלה 4 בגרות קיץ 2014 מועד ב' שאלון 481/804</u>**

משולש שווה שוקיים (קהה זווית) ABC (AB=BC) חסום במעגל.

הישר CD משיק למעגל בנקודה C.

נתון כי $BC \parallel AD$ (ראה ציור).



א. הוכח כי משולש ACD הוא משולש שווה שוקיים.

AD חותך את המעגל בנקודה K.

הוכח:

ב. $\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC$

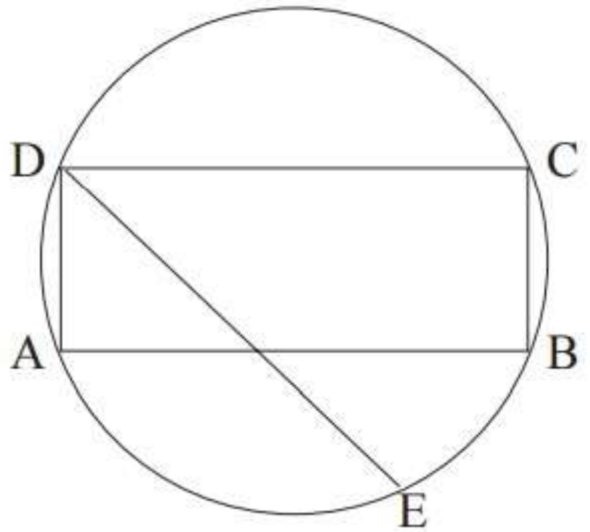
ג. $\Delta ABC \cong \Delta CKD$

(4)

מלבן ABCD חסום במעגל.

הנקודה E נמצאת על הקשתAB כך

ש DE =DC -(ראה ציור)



הוכח :

א. BC = EB

ב. $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBA$