

תלמידים יקרים

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **בעיות קיצון**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומר עזר לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.
באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,
התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!
המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

תוכן עניינים

3.....	✓ בעיות קיצון - בעיות מינימום ומקסימום
3.....	✓ הנתונים והמשתנים המופעים בבעיות מינימום ומקסימום
3.....	✓ השלבים בבעיות קיצון
4.....	בעיות קיצון עם מספרים
4.....	בעיות קיצון גיאומטריות
5.....	שאלה מבגרות 803/382 חורף 2013
5.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב' 2013
6.....	שאלה מבגרות 803/382 חורף 2014
6.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א' 2014
7.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב' 2014
7.....	שאלה מבגרות 803/382 חורף 2015
8.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א 2015
8.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב 2015
9.....	שאלה מבגרות 803/382 חורף 2016
10.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א 2016
10.....	שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב 2016
11.....	שאלה מבגרות 804/481 חורף 2014
11.....	שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד א 2014
12.....	שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד ב 2014
13.....	שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד ג 2014
	שאלה מבגרות 806/581 מועד א 2009 שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות 806/581 חורף 2014 שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	בבעיות מילוליות(תנועה) שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות 806/581 מועד ב 2013 שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות 806/581 חורף 2016 שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות 806/581 קיץ מועד א' 2015 שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.
	שאלה מבגרות שגיאה! הסימניה אינה מוגדרת.

בעיות קיצון - בעיות מינימום ומקסימום

האפשרות למצוא את הפתרון הטוב ביותר מבין מגוון פתרונות אפשריים לבעיה נתונה היא אחד הביטויים לעצמתה של המתמטיקה.

הכלים של החשבון הדיפרנציאלי הם מן הכלים המרכזיים בהשגת מטרה זו.

בעיות קיצון עונות על השאלה כיצד לבחור מבין כל האפשרויות את האפשרות המקסימלית.

בעיות קיצון הן בעיות בהן עלינו למצוא עבור איזה ערך של x מתקבל גודל מקסימלי או מינימלי כלשהו (שטח, נפח, אורך וכו').

בעיות קיצון יכולות להופיע בנושאים שונים:

בגיאומטריה, באינטגרלים, בבעיות מילוליות ובגיאומטריה אנליטית.

כל המתמטיקאים הגדולים עסקו בבעיות קיצון.

הנתונים והמשתנים המופיעים בבעיות מינימום ומקסימום

1. נתון או נתונים קבועים.
2. שני משתנים (אפשר לסמנם ב- x ו- z) או יותר הקשורים זה לזה באמצעות הנתון הקבוע.
3. משתנה נוסף (אפשר לסמנו ב- y), זהו הביטוי עבורו רוצים למצוא את המינימום או המקסימום.

השלבים בבעיות קיצון

1. **קביעת נעלמים:** נסמן ב- x את אחד המשתנים בשאלה, ניעזר בנתונים ונבטא באמצעות x את המשתנים הנוספים המופיעים בשאלה.
2. **בניית פונקציית המטרה:** נזהה את הפונקציה שעבורה יש למצוא את המינימום או המקסימום ונבטא אותה באמצעות x בלבד.
3. **מציאת הנקודות החשודות כנקודות קיצון,** על ידי גזירת פונקציית המטרה, והשוואת הנגזרת לאפס. ונמצא את ערכי x שעבורם מקבלת הפונקציה מינימום או מקסימום.
4. **קביעת סוג הנקודה** (מינימום או מקסימום) בעזרת הנגזרת השנייה או באמצעות טבלה.
5. **בדיקה מחדש** – מה ביקשו בשאלה? יש לרשום תשובה בהתאם לנקודת הקיצון שמצאנו. במידת הצורך, לחשב את הערך המינימלי או המקסימלי

(1) ✓



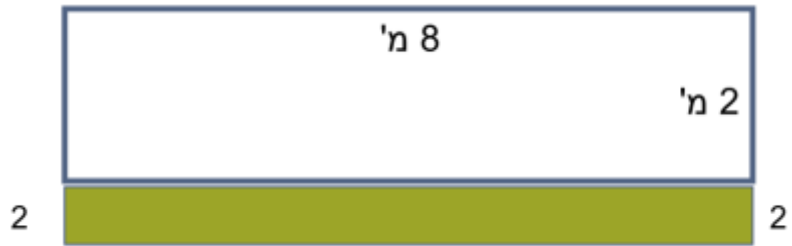
אני רוצה לבנות חצר מלבנית לכלב שלי ג'זמו, החצר תהיה צמודה לקיר ארוך בקצה החצר.

קניתי גליל גדר רשת באורך 12 מטר.

אחת מצלעות המלבן (החצר של ג'זמו) היא קיר,

ולכן הגדר צריכה להספיק לשלוש צלעות של מלבן.

מהו השטח הגדול ביותר של חצר שאני יכולה לבנות בדרך זו?



בעיות קיצון עם מספרים

✓ (2)

סכום של שני מספרים הוא 8. מצא את שני המספרים, אם נתון שסכום ריבועיהם מינימלי.

(3)

א. מבין כל זוגות המספרים החיוביים x ו- z המקיימים $x \cdot z = 48$, מצא את זוג המספרים שעבורם הסכום $x + 3z$ הוא מינימלי.
ב. מהו הסכום המינימלי?

✓ (4)

א. מבין כל המספרים החיוביים x ו- y המקיימים $x \cdot y = 100$, מצא את שני המספרים שעבורם הסכום $x + 4y$ הוא מינימלי.
ב. מהו הסכום המינימלי?

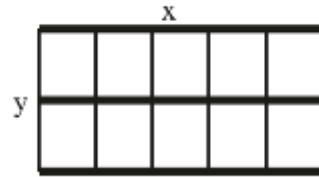
בעיות קיצון גיאומטריות

✓ (5)

מחוט מתכת דקורטיבי שאורכו a מטרים רוצים להכין מסגרת לחלון, שתהיה מורכבת משלוש צלעות של מלבן, וחצי מעגל שקוטרו הוא הצלע הרביעית של המלבן.
א. מה צריך להיות קוטר המעגל כדי ששטח החלון יהיה מקסימלי?
ב. מהו החלון בעל השטח הגדול ביותר שניתן לבנות בדרך זו?

✓ (6)

בציור שלפניך מוצגת רשת שצורתה מלבן.



הרשת עשויה מ-3 מוטות ארוכים שהאורך של כל אחד מהם הוא x ,
ומ-6 מוטות קצרים שהאורך של כל אחד מהם הוא y .

נתון: $x \cdot y = 18$

א. הבע את y באמצעות x .

(2) הבע באמצעות x את סכום האורכים של כל המוטות שהרשת עשויה מהם.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום האורכים של כל המוטות, שהרשת עשויה מהם, יהיה מינימלי?

✓ (7)

שאלה מבגרות 803/382 חורף 2013

א. מבין כל זוגות המספרים החיוביים x ו- z המקיימים $x \cdot z = 48$, מצא את זוג המספרים שעבורם הסכום $x+3z$ הוא מינימלי.

ב. מהו הסכום המינימלי?

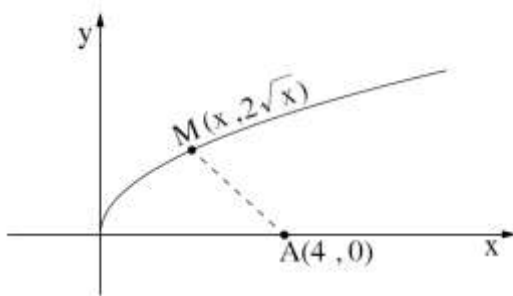
✓ (8)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב' 2013

נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x}$ ראה ציור.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודה M על גרף הפונקציה, שמרחקה בריבוע (d^2) מהנקודה $A(4, 0)$ הוא מינימלי.

ב. מצא את המרחק המינימלי (d) שבין הנקודה M לנקודה A .



6. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x}$

(ראה ציור).

א. מצא את שיעור ה- x של

נקודה M על גרף הפונקציה,

שמרחקה בריבוע (d^2)

מהנקודה $A(4, 0)$ הוא מינימלי.

ב. מצא את המרחק המינימלי (d) שבין הנקודה M לנקודה A .

✓ (9)

שאלה מבגרות 803/382 חורף 2014

נתונים שני מלבנים ABCD ו-PQRS (ראה ציור)

נתון: 30 ס"מ $AB+BC$ = סכום אורכי הצלעות AB ו-BC הוא 30 ס"מ)

$$AB=PQ$$

$$QR=x$$

$$BC=2x$$

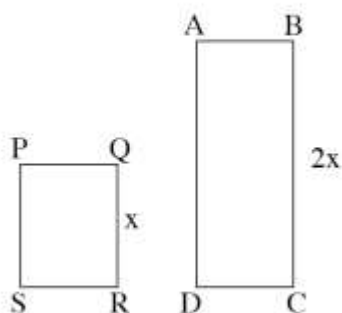
א. (1) הבע באמצעות x את AB.

(2) הבע באמצעות x את סכום שטחי המלבנים.

ב. מה צריך להיות x כדי שסכום שטחי המלבנים יהיה מקסימלי?

6. נתונים שני מלבנים ABCD ו-PQRS (ראה ציור).

נתון: 30 ס"מ $AB + BC =$ (סכום אורכי הצלעות AB ו-BC הוא 30 ס"מ).



$$AB = PQ$$

$$QR = x$$

$$BC = 2x$$

א. (1) הבע באמצעות x את אורך הצלע AB.

(2) הבע באמצעות x את סכום שטחי המלבנים.

ב. מה צריך להיות x כדי שסכום שטחי המלבנים

יהיה מקסימלי?

(10)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א' 2014

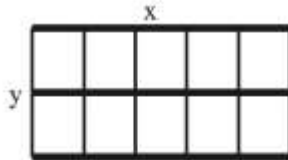
בציור שלפניך מוצגת רשת שצורתה מלבן. הרשת עשויה מ-3 מוטות ארוכים שהאורך של כל אחד מהם הוא x , ו-6 מוטות קצרים שהאורך של כל אחד מהם הוא.

נתון: $xy=18$

א. (1) הבע את y באמצעות x .

(2) הבע באמצעות x את סכום האורכים של כל המוטות שהרשת עשויה מהם.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום האורכים של כל המוטות, שהרשת עשויה מהם, יהיה מינימלי?



6. בציוור שלפניך מוצגת רשת שצורתה מלבן.

הרשת עשויה מ-3 מוטות ארוכים שהאורך של

כל אחד מהם הוא x ,

ומ-6 מוטות קצרים שהאורך של כל אחד מהם הוא y .

נתון: $x \cdot y = 18$.

א. (1) הבע את y באמצעות x .

(2) הבע באמצעות x את סכום האורכים של כל המוטות שהרשת עשויה מהם.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום האורכים של כל המוטות, שהרשת עשויה מהם, יהיה

מינימלי?

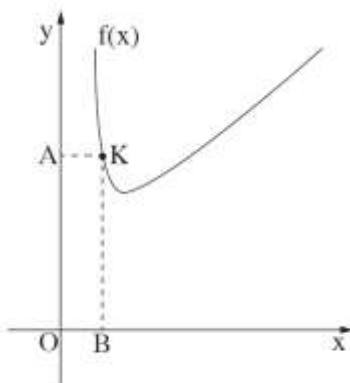
(11)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב' 2014

בציוור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x + 0.5/x + 5$ בתחום $x > 0$. מנקודה K , הנמצאת על גרף הפונקציה, מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן $AKBO$ (ראשית הצירים).

א. הבע את האורכים של צלעות המלבן AK ו- KB באמצעות שיעור ה- x של הנקודה K .

ב. מה צריך להיות שיעור ה- x של הנקודה K כדי שהיקף המלבן $AKBO$ יהיה מינימלי?



6. בציוור שלפניך מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5 \quad x > 0$$

מנקודה K , הנמצאת על גרף הפונקציה,

מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן $AKBO$

(O – ראשית הצירים).

א. הבע את האורכים של צלעות המלבן AK ו- KB

באמצעות שיעור ה- x של הנקודה K .

ב. מה צריך להיות שיעור ה- x של הנקודה K

כדי שהיקף המלבן $AKBO$ יהיה מינימלי?

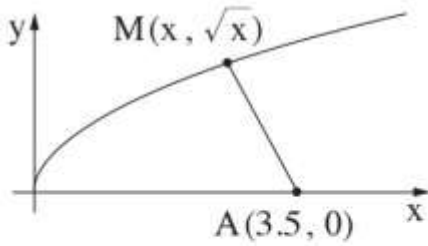
(12)

שאלה מבגרות 803/382 חורף 2015

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ ונתונה הנקודה $A(3.5, 0)$. נקודה M נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$. נסמן את השיעורים של הנקודה M : (x, \sqrt{x}) . ראה ציור

א. הבע באמצעות x את ריבוע האורך של הקטע MA , כלומר את $(MA)^2$

ב. מצא מה צריך להיות x , כדי שריבוע האורך של הקטע MA יהיה מינימלי.



נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$,

ונתונה הנקודה $A(3.5, 0)$.

נקודה M נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נסמן את השיעורים של הנקודה $M(x, \sqrt{x})$:

(ראה ציור).

א. הבע באמצעות x את ריבוע האורך של הקטע MA , כלומר את $(MA)^2$.

ב. מצא מה צריך להיות x , כדי שריבוע האורך של הקטע MA יהיה מינימלי.

(13)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א 2015

נתונה גינת נוי שצורתה מלבן. ממדי המלבן הם 8 מטרים ו-6 מטרים (ראה ציור).

רוצים לשתול דשא בשטחים המקווקוים שבציור:

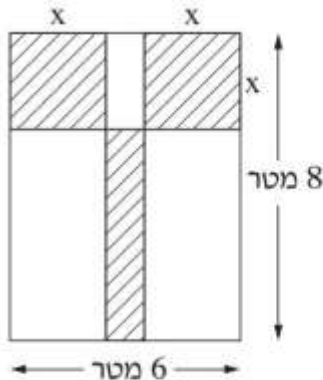
שני שטחים הם בצורת ריבועים זהים, ושטח אחד הוא בצורת מלבן, כמתואר בציור, המחיר של שתילת 1 מ"ר של דשא הוא 60 שקל.

נסמן ב- x את אורך הצלע של הריבועים

א. הבע באמצעות x את כל השטח המקווקו בציור.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח של הדשא יהיה מינימלי?

ג. מצא את המחיר המינימלי של שתילת הדשא.



נתונה גינת נוי שצורתה מלבן.

ממדי המלבן הם 8 מטרים ו-6 מטרים (ראה ציור).

רוצים לשתול דשא בשטחים המקווקוים שבציור:

שני שטחים הם בצורת ריבועים זהים,

ושטח אחד הוא בצורת מלבן, כמתואר בציור.

המחיר של שתילת 1 מ"ר של דשא הוא 60 שקל.

נסמן ב- x את אורך הצלע של הריבועים.

א. הבע באמצעות x את כל השטח המקווקו בציור.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח של הדשא יהיה מינימלי?

ג. מצא את המחיר המינימלי של שתילת הדשא.

(14)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב 2015

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה $y = -x^2 + 3x$

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה-x החותך את הציר בנקודה B. נסמן ב-x את שיעור ה-x של הנקודה A (ראה ציור).

א. הבע באמצעות x את האורך של OB ואת האורך של AB. O היא ראשית הצירים.

ב (1). מצא מה צריך להיות x, כדי ששטח המשולש ABO יהיה מקסימלי.

(2) מצא את השטח המקסימלי של המשולש ABO

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה

$$y = -x^2 + 3x$$

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה-x החותך

את הציר בנקודה B.

נסמן ב-x את שיעור ה-x של הנקודה A (ראה ציור).

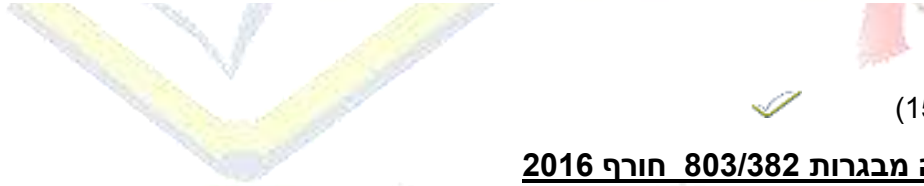
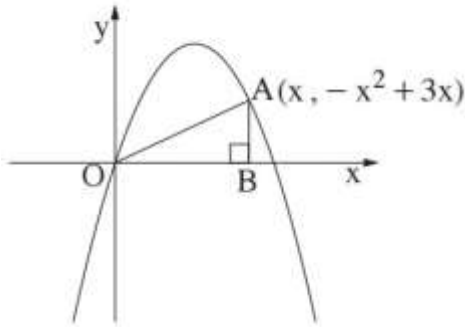
א. הבע באמצעות x את האורך של OB

ואת האורך של AB.

O – ראשית הצירים.

ב (1) מצא מה צריך להיות x, כדי ששטח המשולש ABO יהיה מקסימלי.

(2) מצא את השטח המקסימלי של המשולש ABO.



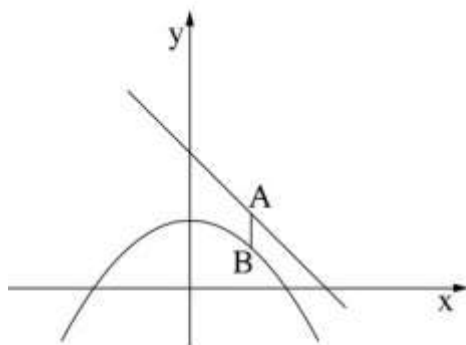
(15)

שאלה מבגרות 803/382 חורף 2016

נתונה הפונקציה $y = -0.5x^2 + 1$ ונתון הישר $y = -x + 2$ הנקודה A נמצאת על הישר, והנקודה B על גרף הפונקציה f(x) כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

א. מה צריך להיות שיעור ה-x של A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי?

ב. מצא את האורך המינימלי של AB



נתונה הפונקציה $f(x) = -0.5x^2 + 1$

ונתון הישר $y = -x + 2$.

הנקודה A נמצאת על הישר,

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה f(x)

כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y

(ראה ציור).

א. מה צריך להיות שיעור ה-x של A,

כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי?

ב. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.



(16)

שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד א 2016

במלבן ABCD נתון: $AD=BC=6\text{cm}$, $AB=DC=10\text{cm}$

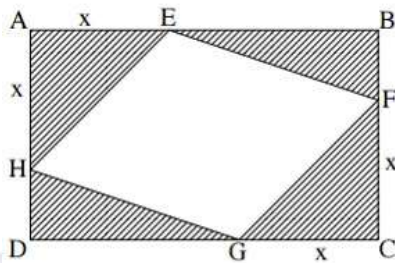
על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים: $AE=AH=CF=CG=x$

ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם מקווקו בציר.

א. הבע באמצעות x את כל השטח המקווקו בציר.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח המקווקו יהיה מינימלי.

ג. חשב את שטח המרובע EFGH כאשר השטח המקווקו הוא מינימלי



במלבן ABCD נתון:

$AB = DC = 10\text{ ס"מ}$

$AD = BC = 6\text{ ס"מ}$

על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים:

$AE = AH = CF = CG = x$

ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם

מקווקו בציר.

א. הבע באמצעות x את כל השטח המקווקו בציר.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח המקווקו יהיה מינימלי?

ג. חשב את שטח המרובע EFGH כאשר השטח המקווקו הוא מינימלי.



(17)

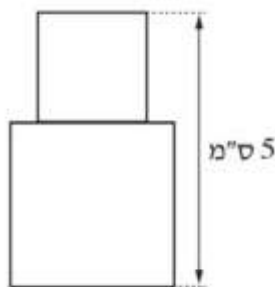
שאלה מבגרות 803/382 קיץ מועד ב 2016

נתונה צורה המורכבת משני ריבועים המונחים זה על זה (הריבועים יכולים להיות שונים גודלם או שווים בגודלם) גובה הצורה הוא 5 ס"מ (ראה ציור).

א. סמן ב- x את אורך הצלע של הריבוע התחתון, והבע באמצעות x את אורך הצלע של הריבוע העליון.

ב. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח הצורה יהיה מינימלי.

ג. חשב את השטח המינימלי של הצורה.



נתונה צורה המורכבת משני ריבועים המונחים זה על זה

(הריבועים יכולים להיות שונים בגודלם או שווים בגודלם).

גובה הצורה הוא 5 ס"מ (ראה ציור).

א. סמן ב- x את אורך הצלע של הריבוע התחתון,

והבע באמצעות x את אורך הצלע של הריבוע העליון.

ב. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח הצורה יהיה מינימלי.

ג. חשב את השטח המינימלי של הצורה.



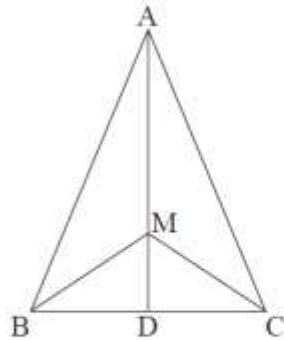
(18)

שאלה מבגרות 804/481 חורף 2014

נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) שבו אורך הגובה AD לבסיס BC הוא 12 ס"מ, ואורך הבסיס BC הוא 10 ס"מ. M היא נקודה כלשהי על הגובה AD . נסמן: $MD=x$.

א. מצא עבור איזה ערך של x סכום הקטעים $AM+MB+MC$ הוא מינימלי. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

ב. חשב את גודל הזווית BMC עבור הערך של x שמצאת בסעיף א.



נתון משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$)

שבו אורך הגובה AD לבסיס BC הוא 12 ס"מ,

ואורך הבסיס BC הוא 10 ס"מ.

M היא נקודה כלשהי על הגובה AD .

נסמן: $MD = x$.

א. מצא עבור איזה ערך של x

סכום הקטעים $AM + MB + MC$ הוא מינימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

ב. חשב את גודל הזווית BMC עבור הערך של x שמצאת בסעיף א.



(19)

שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד א 2014

האורך של קיר בצורת מלבן הוא 16 מטר, והגובה של הקיר הוא 0 מטר. רוצים לצפות בקרמיקה חלק מהקיר. החלק שרוצים לצפות כולל:

- שני ריבועים זהים בפינות המלבן

- משולש שווה שוקיים שבסיסו מקביל לצלע המלבן (השטחים האפורים בציור).

זמן ב- x את האורך של צלע הריבוע, וענה על הסעיפים א-ג.

א. הבע באמצעות x את הגובה לבסיס במשולש שווה השוקיים.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה יהיה מינימלי?

ג. עבור ה- x שמצאת בסעיף ב, חשב כמה אחוזים משטח הקיר מהווה החלק שרוצים לצפות בקרמיקה.

8. האורך של קיר בצורת מלבן הוא 16 מטר,

והגובה של הקיר הוא 10 מטר.

רוצים לצפות בקרמיקה חלק מהקיר.

החלק שרוצים לצפות כולל:

— שני ריבועים זהים בפינות המלבן

— משולש שווה-שוקיים שבסיסו מקביל לצלע המלבן

(השטחים האפורים בציור).

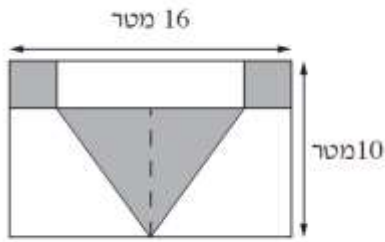
סמן ב- x את האורך של צלע הריבוע, וענה על הסעיפים א-ג.

א. הבע באמצעות x את הגובה לבסיס במשולש שווה-השוקיים.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה יהיה מינימלי?

ג. עבור ה- x שמצאת בסעיף ב, חשב כמה אחוזים משטח הקיר מהווה החלק שרוצים לצפות

בקרמיקה.



(20)

שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד ב 2014

בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות $f(x) = -x^2 + 9$ ו- $g(x) = (x - 3)^2$

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$. מנקודה A העבירו שני ישרים: ישר אחד, המקביל לציר ה-Y וחותר את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B, וישר אחד, המקביל לציר ה-X וחותר את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C. (ראה ציור).

נסמן את שיעור ה- x של נקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A, B ו-C.

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.



8. בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = -x^2 + 9 \quad \text{ו} \quad g(x) = (x - 3)^2$$

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על

גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר אחד, המקביל לציר ה- y

וחותר את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B,

וישר אחר, המקביל לציר ה- x

וחותר את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C

(ראה ציור).

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A, B ו-C.

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.



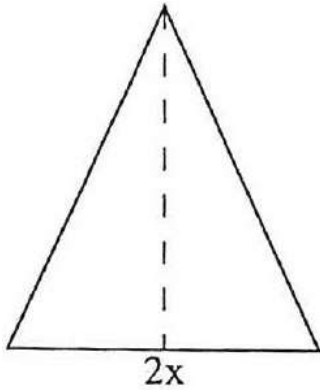
(21)

שאלה מבגרות 804/481 קיץ מועד ג 2014

נתון משולש שווה שוקיים שהיקפו 30 ס"מ.

א. סמן ב- $2x$ את בסיס המשולש, והבע באמצעות x את גובה המשולש לבסיס.ב. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?

ג. הראה כי המשולש שיש לו שטח מקסימלי הוא משולש שווה צלעות.



נתון משולש שווה-שוקיים שהיקפו 30 ס"מ.

א. סמן ב- $2x$ את בסיס המשולש,והבע באמצעות x את גובה המשולש לבסיס.ב. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?

ג. הראה כי המשולש שיש לו שטח מקסימלי

הוא משולש שווה-צלעות.



openbook
המרכז לקידום אקדמי