תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **טריגונומטריה**, המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

חוברת זו בנושא **טריגונומטריה**: זהויות, משוואות טריגונומטריות, משפט הסינוסים, משפט קוסינוסים ועוד.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

✓ קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל service@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

תאריך עדכון: אוקטובר 2016

זהויות

יש 2 דרכים להוכחת זהויות:

(1) נפעל בשני האגפים כאילו הייתה זו משוואה רגילה,

בעזרת כללי אלגברה (ניתן לכפול או לחלק את הזהות באותו ביטוי שונה מאפס, העברת אגפים ולהפוך את סימניהם וכו') או בעזרת זהויות ידועות.

כשנגיע לשוויון אלגברי- כאשר בשני האגפים יש את אותו הביטוי או לזהות טריגונומטרית ידועה אז הוכחנו את הזהות המבוקשת.

(2) נתחיל מאגף אחד ונגיע לשני.

נפעל רק באחד מהאגפים בעזרת כללי אלגברה או בעזרת זהויות ידועות – לפתח את הביטוי שמופיע באגף זה ולהגיע לביטוי באגף השני.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\sin(\alpha - 180°) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha - 180°) = \tan\alpha$$

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$$

הוכח את הזהות:

1.
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

2.
$$\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$$

3.
$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

4.
$$\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -1$$

5.
$$\frac{\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha} + \cos^2\alpha\tan^2\alpha = 1$$

6.
$$1 - \sin^2\alpha\,(1 + \cos^2\alpha) = \cos^4\alpha$$

7.
$$\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - (\tan\alpha - \cot\alpha)^2 = 2$$

8.
$$\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha\cos\alpha)$$

9.
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$

משוואות טריגונומטריות

משוואה טריגונומטרית היא משוואה שבה מופיעות פונקציות טריגונומטריות המכילות נעלם.

למשל, המשוואות: $\sin x = \frac{1}{2}$, $8\cos 3x = 2$, $\sin x = 4\cos x$.

המטרה היא למצוא את הערכים של x המקיימים את המשוואה.

פתרונות יסודיים של משוואות מהצורה $sin\,(ax+b) = m$

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה מהצורה sinx=a ניעזר בשתי הזהויות:

1) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

2) $\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$

<u>מהזהות הראשונה</u> נקבל שאם זווית α היא פתרון של המשוואה sinx=a אז גם הזוית $180° - \alpha$ היא פתרון נוסף של המשוואה

<u>מהזהות השנייה</u> נקבל שאם זווית α היא פתרון של המשוואה sinx=a אז גם זויות המתקבלות ע"י הוספת/חיסור כפולות שלמות של $360°$ מהזוית α הן פתרונות של המשוואה.

פתרונות כלליים (מחזוריים) של משוואות מהצורה $sin\,(ax+b) = m$

נרשום את כל הפתרונות בעזרת האות k, המייצגת מספר שלם.

אם α הוא פתרון של המשוואה אז פתרון כללי הוא:

$$\alpha + 360°k$$

$$k = \cdots, -3, -2, -1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3, \ldots$$

<u>תרגיל (1)</u>

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin x = \frac{1}{2}$

ואת כל הפתרונות בתחום: $-360° \le x \le 360°$

<u>פתרון</u>: $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$. פתרונות בתחום: $-330°\,, -210°\,, 30°\,, 150°$

השלבים בפתרון המשוואה $sin\,(ax+b)=m$

(1) בודקים תחום הגדרה: $-1\le a\le 1$ $\quad\sin x=a$

(2) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי α שמקיים: $\sin\alpha=a$

(3) מוצאים פתרון יסודי נוסף: $180°-\alpha$

(4) מוסיפים $360°k$ לכל אחד מהפתרונות היסודיים ומקבלים את הפתרונות הכלליים:

$$x_1=\alpha+360°k$$

$$x_2=(180°-\alpha)+360°k$$

(5) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום k לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k=\cdots,-3,-2,-1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3,\ldots$$

תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ואת כל הפתרונות בתחום: $-360°\le x\le 360°$

פתרון: $x_1=45°+360°k$, $x_2=135°+360°k$. פתרונות בתחום: $135°\,,45°\,,-225°\,,-315°$

תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

פתרון: $x_1=-60°+360°k$, $x_2=240°+360°k$.

תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון: $x_1=-135°+1080°k$, $x_2=675°+1080°k$.

תרגיל (5)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin(70°-4x)\ =-1$

פתרון: $x\ =\ 40°\ +\ 90°k$

השלבים בפתרון המשוואה $cos\,(ax+b)=m$

(1) בודקים תחום הגדרה: $-1 \le a \le 1 \qquad \cos x = a$

(2) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי α שמקיים: $\cos\alpha = a$

(3) מוצאים פתרון יסודי נוסף: $-\alpha$

(4) מוסיפים $360°k$ לכל אחד מהפתרונות היסודיים ומקבלים את הפתרונות הכלליים:

$$x_1 = \alpha + 360°k$$

$$x_2 = -\alpha + 360°k$$

(5) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום k לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k = \cdots, -3, -2, -1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3, \ldots$$

תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $cos\,x = \frac{1}{2}$

פתרון: $x_1 = 60° + 360°k$, $x_2 = -60° + 360°k$.

תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $cos\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון: $x_1 = 135° + 360°k$, $x_2 = -135° + 360°k$.

תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $cos\,3x = 0.5$

פתרון: $x_1 = 20° + 120°k$, $x_2 = -20° + 120°k$.

תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $cos(50° + 2x) \ = 1$

פתרון:$x = -25° + 180°k$

השלבים בפתרון המשוואה $tanx = m$

(1) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי α שמקיים: $\tan\alpha = m$

(2) מוסיפים $180°k$ לפתרון היסודי ומקבלים את הפתרון הכללי:

$$x = \alpha + 180°k$$

(3) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום k לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k = \cdots, -3, -2, -1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3, \dots$$

תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $tan\,x = -1$

ואת כל הפתרונות בתחום: $0° \le x \le 360°$

פתרון: $x = -45° + 180°k$. פתרונות בתחום: $135°\ ,315°$

תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $tan\,4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

פתרון: $x = 7.5° + 45°k$.

תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $tan\,9x = 1$

פתרון: $x = 5° + 20°k$.

תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $tan(4x + 24°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

פתרון: $x = 1.5° + 45°k$.

משוואות טריגונומטריות שונות

משוואות טריגונומטריות עם הוצאת שורש משני האגפים

תרגיל (1)

פתור את המשוואה ומצא פתרון כללי

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

משוואות טריגונומטריות עם הוצאת גורם משותף

תרגיל (1)

פתור את המשוואה בתחום: $0° \le x \le 360°$

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$2\cos^2 2x = \sqrt{3}\cos 2x$$

משוואות טריגונומטריות בהן נקבל משוואה ריבועית

תרגיל (1)

פתור את המשוואה

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$12\cos^2 x - 13\cos x + 3 = 0$$

משוואות טריגונומטריות הכוללת אותה פונקציה משני האגפים

תרגיל (1)
יש 2 דרכים לפתור את המשוואה: $\sin x = \sin 2x$

(1) בהסתמך על הזהות $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) בהסתמך על הפתרונות של המשוואה $\sin x = a$

תרגיל (2)
מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin 3x = \sin(2x + 50°)$

תרגיל (3)
מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin x + \sin 5x = 0$

תרגיל (4)
מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos(5x - 40°) = \cos(3x + 70°)$

תרגיל (5)
מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos 3x + \cos 7x = 0$

תרגיל (6)
מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\tan 5x = \tan 2x$

משוואות טריגונומטריות הכוללת פונקציות שונות משני האגפים

תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\sin 6x=\cos 3x$

תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $sin\,4x=cos\,x$

תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $cos\,2x=sin\,3x$

תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $sin(3x+60°)=-cos(x-120°)$

פתרון משוואות טריגונומטריות שימוש בזהות לזווית הכפולה או סכום/הפרש זווית

מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

.1

$$7\cos x+2\sin 2x=0$$

.2

$$\sin(2x+60°)=\sqrt{3}\sin(x+30°)$$

.3

$$\frac{\tan x}{\sin 2x}=\frac{2}{3}$$

.4

$$\sin 2x\cos 2x=0.5$$

.5

$$\sin x\cos x\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

.6

$$\tan x+\cot x=4\sin 2x$$

.7

$$\cos 2x=2+3\sin x$$

.8

$$\cos 4x + 1 - \cos 2x = 0$$

.9

$$3\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

.10

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 8x$$

.11

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 4x$$

.12

$$1 - 2\sin^2 x + \cos 4x = 0$$

.13

$$2\cos^2 x = 1 + sin\, 3x$$

.14

$$\sin x\cos^3 x - \sin^3 x\cos x = 0.25$$

.15

$$\cos 4x + 8\sin^4 x = 1$$

.16

$$\sin 3x\sin x + \cos 3x\cos x = 1 - \sin x$$

.17

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2$$

.18

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} - \frac{\sin 5x}{\sin x} = 2$$

.19

$$\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$$

.20

$$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos 2x$$

.21

$$\cos 2x = 2\cos^3 x - \cos x$$

.22

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x - 1$$

.23

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\sin^2 x$$

.24

$$1 + \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$$

.25

$$\cos(2x + 20°) + 3\sin(80° - x) + 2 = 0$$

.26

$$\cos 3x + 2\sin^2 x \cos x = 0$$

.27

$$\sin 3x = 2\sin x$$

פתרון משוואות טריגונומטריות שימוש בזהות לסכום והפרש פונקציות

מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

.1

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x$$

.2

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x$$

.3

$$\sin 6x + \sin 2x = 2\cos^2 2x$$

.4

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x$$

.5

$$\cos 2x - \cos 6x = \cos 10x$$

.6

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x$$

.7

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

.8

$$\sin^2 4x - \sin^2 2x = \sin 6x$$

.9

$$\cos^2 x - \cos^2 3x = \sin^2 2x$$

הזזות, מתיחות או כיווץ של פונקציות טריגונומטריות

$y = \sin x + B$

	$y = \sin x$	$y = \sin x + B$
תחום הגדרה	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$
תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)	$-1 \le y \le 1$	$B-1 \le y \le B+1$
מחזוריות	2π	2π
חיתוך עם הציר ה-y	$(0,0)$	$(0,B)$
חיתוך עם הציר ה-x	$x = \pi k$	$x = \pi k$ חיתוך עם ציר ה-x לפי תחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל יתכן שהפונקציה לא חותכת את ציר ה-x.
תחומי עליה	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$
תחומי ירידה	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$
תחומי חיוביות	$(2\pi k, \pi+2\pi k)$	תלוי בתחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל. יתכן שלא חותכת את ציר ה-x
תחומי שליליות	$(-\pi+2\pi k, 2\pi k)$	תלוי בתחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל. יתכן שלא חותכת את ציר ה-x
נקודות קיצון	מקסימום $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 1\right)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, -1\right)$	מקסימום $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, B+1\right)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, B-1\right)$
זוגיות / אי זוגיות	אי זוגית	לא אי זוגית ולא זוגית
אסימפטוטות	אין	אין

$y = sin\,(ax)$

	$y = sin\,x$	$y = sin\,(ax)$
תחום הגדרה	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$
תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)	$-1 \le y \le 1$	$-1 \le y \le 1$
מחזוריות	2π	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
חיתוך עם הציר ה-y	(0,0)	(0,0)
חיתוך עם הציר ה-x	$x = \pi k$	$\left(\frac{\pi k}{\lvert a\rvert}, 0\right)$
תחומי עליה	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{\lvert a\rvert}, \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{\lvert a\rvert}\right)$
תחומי ירידה	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{\lvert a\rvert}, \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{\lvert a\rvert}\right)$
תחומי חיוביות	$(2\pi k\,, \pi + 2\pi k)$	$\left(\frac{2\pi k}{\lvert a\rvert}, \frac{\pi + 2\pi k}{\lvert a\rvert}\right)$
תחומי שליליות	$(-\pi + 2\pi k\,, 2\pi k)$	$\left(\frac{-\pi + 2\pi k}{\lvert a\rvert}, \frac{2\pi k}{\lvert a\rvert}\right)$
נקודות קיצון	מקסימום $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, 1\right)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, -1\right)$	מקסימום $\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{\lvert a\rvert}\,, 1\right)$ מינימום $\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{\lvert a\rvert}\,, -1\right)$
זוגיות / אי זוגיות	אי זוגית	אי זוגית
אסימפטוטות	אין	אין

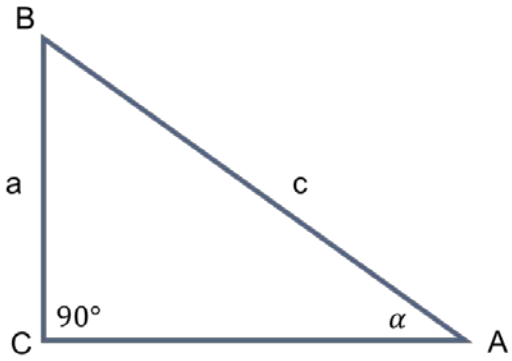
$y = |B| \cos x$

	$y = \cos x$	$y = B\cos(x)$
תחום הגדרה	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$	מוגדרת לכל x $\mathbb{R}$
תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)	$-1 \le y \le 1$	$-\|B\| \le y \le \|B\|$
מחזוריות	2π	2π
חיתוך עם הציר ה-y	(0,1)	(0,B)
חיתוך עם הציר ה-x	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
תחומי עליה	$(-\pi + 2\pi k\,, 2\pi k)$	$(-\pi + 2\pi k\,, 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי העלייה והירידה של הפונק הפוכים לאלה של הפונ cosx
תחומי ירידה	$(2\pi k\,, \pi + 2\pi k)$	$(2\pi k\,, \pi + 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי העלייה והירידה של הפונק הפוכים לאלה של הפונ cosx
תחומי חיוביות	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי החיוביות והשליליות של הפונק הפוכים לאלה של הפונ cosx
תחומי שליליות	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי החיוביות והשליליות של הפונק הפוכים לאלה של הפונ cosx
נקודות קיצון	מקסימום $(2\pi k\,, 1)$ מינימום $(\pi + 2\pi k\,, -1)$	מקסימום $(2\pi k\,, \|B\|)$ מינימום $(\pi + 2\pi k\,, -\|B\|)$
זוגיות / אי זוגיות	זוגית	זוגית
אסימפטוטות	אין	אין

משפט הסינוסים

משולש ישר זווית – sin , cos , tan

עד כה השתמשנו בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס בחישובים במשולש ישר זווית.



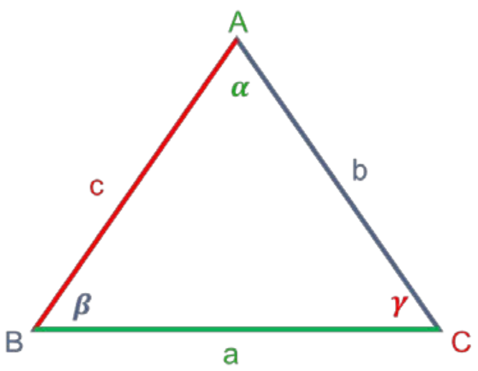
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{מול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{מול}}{\text{ליד}}$$

<u>האם קיים משפט שמאפשר חישוב גם במשולשים שאינם ישרי זווית?</u>

היום נכיר משפט מרכזי בטריגונומטריה: משפט הסינוסים



משפט הסינוסים

נתון משולש ABC שהסימנים במשולש הם:

A , B , C קדקודים.

α,β,γ הזוויות ליד הקדקודים בהתאמה.

a,b,c הצלעות מול הקדקודים בהתאמה.

מתקיים:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

היחס בין אורך כל צלע במשולש ובין סינוס הזווית שמולה קבוע

מתי נשתמש במשפט הסינוסים?

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

נשתמש במשפט הסינוסים לפתרון בעיות במשולשים במקרים הבאים:

(1) אם נתונות שתי זוויות ואחת הצלעות (במקרה זה יש פתרון יחיד).

(2) אם נתונות שתי צלעות וזווית מול אחת מהן. (במקרה זה ייתכן וקיימים שני פתרונות.)

<u>תרגיל (1)</u>

במשולש נתונות שתי צלעות: 4 ס"מ ו- 6.5 ס"מ, והזווית שמול הצלע הקטנה שווה ל- 32°.

חשב את הזווית שמול הצלע הגדולה.

<u>תרגיל (2)</u>

במשולש ABC נתון: 6 ס"מ =AB.

$\sphericalangle C = 54°$, $\sphericalangle A = 84°$.

חשב את אורכי הצלעות BC ו- AC.

<u>תרגיל (3)</u>

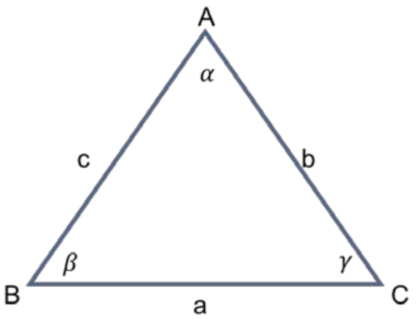
במשולש ABC נתון: 9 ס"מ =AC , 15 ס"מ = BC , $\sphericalangle A = 78°$.

חשב את הזוויות B ו- C.

<u>תרגיל (4)</u>

במשולש ABC נתון: 15 ס"מ =AB , 18 ס"מ = AC , $\sphericalangle C = 45°$.

חשב את הזווית B.



משפט הקוסינוסים

מתי נשתמש במשפט הסינוסים?

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

נשתמש במשפט הסינוסים לפתרון בעיות במשולשים במקרים הבאים:

(1) אם נתונות שתי זוויות ואחת הצלעות (במקרה זה יש פתרון יחיד).

(2) אם נתונות שתי צלעות וזוית מול אחת מהן. (במקרה זה ייתכן וקיימים שני פתרונות.)

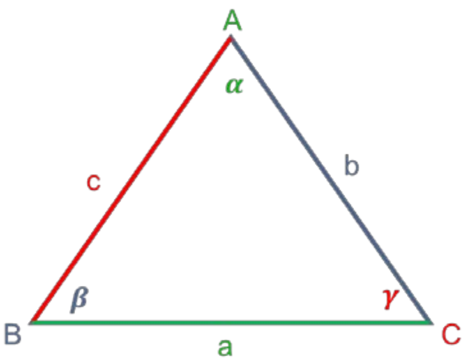
אי אפשר להשתמש במשפט הסינוסים לפתרון בעיות במשולשים במקרים הבאים:

(1) אם נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.

(2) אם נתונות שלוש צלעות.

משפט הקוסינוסים

נתון משולש ABC שהסימנים במשולש הם:



C , B , A קדקודים.

γ,β,α הזוויות ליד הקדקודים בהתאמה.

c,b,a הצלעות מול הקדקודים בהתאמה.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

בכל משולש מתקיים:

ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות

פחות פעמיים מכפלתן בקוסינוס הזווית שביניהן.

מתי נשתמש במשפט הקוסינוסים?

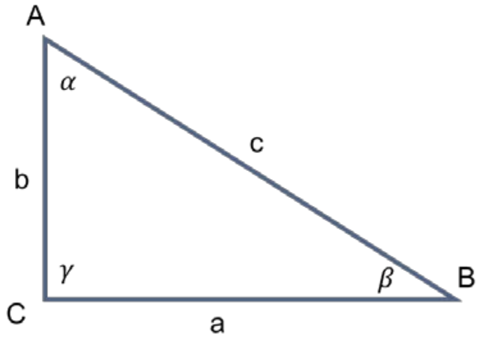
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

נשתמש במשפט הקוסינוסים לפתרון בעיות במשולשים במקרים הבאים:

(1) אם נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן, נמצא את הצלע השלישית.

(2) אם נתונות שלוש צלעות, נוכל למצוא כל אחת מהזוויות

משפט הקוסינוסים מקרה פרטי



נציב במשפט הסינוסים $\gamma = 90°$.

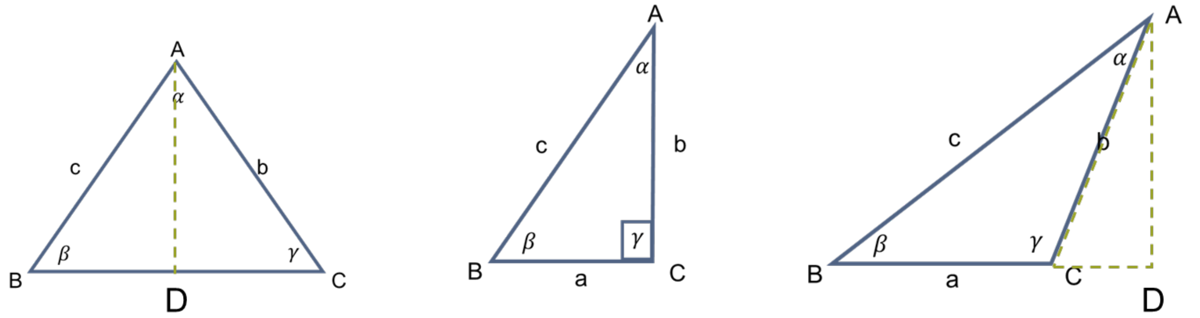
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

כאשר $\gamma = 90º$ $\cos\gamma = 0$. לכן נקבל: $c^2 = a^2 + b^2$

קיבלנו את משפט פיתגורס!

משפט הקוסינוס הוא הכללה של משפט פיתגורס

הוכחת משפט הקוסינוסים



נוסחה למציאת זווית בעזרת משפט הסינוסים.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

כאשר נתונות שלוש הצלעות במשולש,

ניתן להיעזר במשפט הקוסינוסים כדי לחשב כל אחת מזוויות המשולש.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

שני שימושים לנוסחה:

(1) בעזרת נוסחה זו נחשב זווית במשולש כשנתונים אורכי שלוש הצלעות במשולש.

(2) בעזרת נוסחה זו אפשר לקבוע אם זווית מסוימת במשולש היא חדה ישרה או קהה.

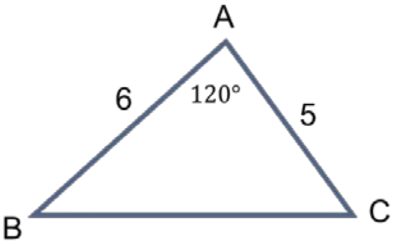
המכנה 2ab של אגף ימין הוא גודל חיובי.

נבחין בין 3 מקרים:

מקרה 1 – אם $a^2+b^2>c^2$ הרי המונה חיובי, כלומר $a^2+b^2-c^2>0$ ולכן המנה חיובית – הביטוי $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ הוא חיובי, כלומר $\cos\gamma$ חיובי ומכאן ש- γ זווית חדה.

מקרה 2 - אם $a^2+b^2=c^2$ הרי המונה שווה לאפס, ולכן המנה שווה לאפס, הביטוי $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ הוא אפס, כלומר $\cos\gamma$ שווה לאפס וזה אומר ש- $\gamma=90°$ זווית ישרה.

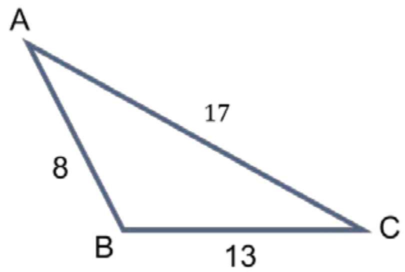
מקרה 3 - אם $a^2+b^2<c^2$ הרי המונה שלילי, כלומר $a^2+b^2-c^2<0$ ולכן המנה שלילת – הביטוי $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ הוא שלילי, כלומר $\cos\gamma$ שלילי ומכאן ש- γ זווית קהה.



<u>תרגיל (1)</u>

במשולש ABC נתון: AB= 6 ס"מ , AC = 5 ס"מ , $\sphericalangle BAC = 120°$.

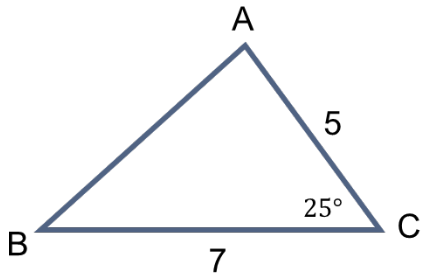
חשב את אורך הצלע BC.



<u>תרגיל (2)</u>

במשולש ABC נתון: AB= 8 ס"מ , AC = 17 ס"מ , BC = 13 ס"מ.

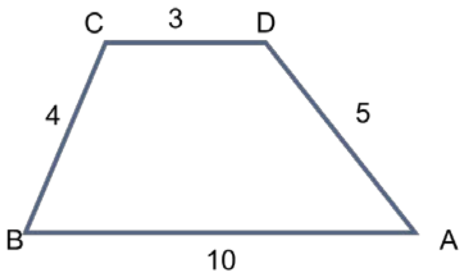
חשב את הזווית B.



<u>תרגיל (3)</u>

במשולש ABC נתון: BC= 7 ס"מ , AC = 5 ס"מ , $\sphericalangle ACB = 25°$.

חשב את הזווית A.



<u>תרגיל (4)</u>

בטרפז ABCD $(CD \parallel BA)$ נתונים:

AD = 5 ס"מ , CD = 3 ס"מ , BC = 4 ס"מ , AB = 10 ס"מ.

חשב את קוטר המעגל החוסם את המשולש ABD.