


תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **גאומטריה אנליטית פרבולה**,
המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה
לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.
באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם
להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

סיכום גאומטריה אנליטית – הקו הישר

משוואת הישר המפורשת היא מהצורה: $y=mx+b$.

כאשר m – שיפוע הישר. b – נקודת חיתוך הישר עם ציר ה- y .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות}$$

משוואת הקו הישר ששיפועו m העובר בנקודה (x_1, y_1) היא: $y - y_1 = m(x - x_1)$

שני ישרים המאונכים זה לזה ששיפועיהם m_1 ו- m_2 הופכיים ונגדיים: $m_1 \cdot m_2 = -1$

אמצע הקטע AB שקצותיו $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $\left(x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

המרחק בין 2 נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

הפרבולה

היא אוסף כל הנקודות במישור אשר נמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה ומישר קבוע.

הנקודה הקבועה - מוקד הפרבולה מסומנת ב-F

הישר הקבוע - מדריך הפרבולה – יסומן ב-L

המרחק הקבוע - רדיוס וקטור ומסומן ב-r.

הפרמטר של הפרבולה – המרחק בין המוקד למדריך מסומן ב-p (מספר חיובי).

קדקוד הפרבולה – נקודת אמצע המרחק שבין המוקד למדריך.

הגדרת הפרבולה: המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה ומישר קבוע נקרא פרבולה.

מצא את הפרמטר, המוקד והמדריך לפרבולות הבאות:

$$y^2 = 20x \quad \checkmark \quad (1)$$

פתרון: $p=10$, $(5,0)$, $x=-5$

$$y^2 = 18x \quad \checkmark \quad (2)$$

פתרון: $p=9$, $(4.5,0)$, $x=-4.5$

$$y^2 = 50x \quad \checkmark \quad (3)$$

פתרון: $p=25$, $(25/2,0)$, $x=-12.5$

 מצא את משוואת הפרבולה הקנונית לפי הנתונים הבאים:

$$\checkmark \quad (4) \quad \text{הפרמטר שלה הוא } 8$$

פתרון: $y^2 = 16x$

$$\checkmark \quad (5) \quad \text{המוקד שלה בנקודה } (4,0)$$

פתרון: $y^2 = 16x$

$$\checkmark \quad (6) \quad \text{משוואת המדריך שלה היא } 3x+9=0$$

פתרון: $y^2 = 12x$

$$\checkmark \quad (7) \quad \text{היא עוברת דרך הנקודה } (4, -4\sqrt{5})$$

פתרון: $y^2 = 20x$

8) ✓ המרחק בין המוקד למדריך שלה הוא 10

פתרון: $y^2 = 20x$

9) ✓ מצא את משוואתה של פרבולה קנונית שהפרמטר שלה הוא 6.

פתרון: $y^2 = 12x$

10) ✓ מצא את משוואתה של פרבולה קנונית שהמוקד שלה הוא בנקודה (6,0)

פתרון: $y^2 = 24x$

11) ✓ מצא את משוואתה של פרבולה קנונית שהיא עוברת דרך הנקודה (8,12)

פתרון: $y^2 = 18x$

אורך רדיוס וקטור בפרבולה

כל נקודה (x_1, y_1) שעל הפרבולה נמצאת במרחק $x_1 + \frac{p}{2}$ ממדריך הפרבולה וממוקד הפרבולה.

המרחקים הללו שווים ונקראים רדיוס הוקטור, מסומן באות r .

שאלות

12) ✓

מצא את הפרמטר, את המוקד ואת המדריך של הפרבולה: $y^2 = 40x$

פתרון: $p=20, (10,0), x=-10$

13) ✓

מצא את הפרמטר, את המוקד ואת המדריך של הפרבולה: $y^2 = 70x$

פתרון: $p=35, (35/2,0), x=-17.5$

14) ✓

מצא את הפרמטר, את המוקד ואת המדריך של הפרבולה: $y^2 = 24x$

פתרון: $p=12, (6,0), x=-6$

15) ✓

מצא את משוואתה של הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$ העוברת דרך הנקודה $(1, -\sqrt{3})$

פתרון: $y^2 = 3x$

16) ✓

מצא את משוואתה של הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$ כאשר המרחק בין המוקד למדריך שלה הוא 3.

פתרון: $y^2 = 6x$

✓ (17)

מצא את משוואתה של הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$ כאשר משוואת המדריך שלה היא $2x+9=0$

פתרון: $y^2 = 18x$

✓ (18)

נקודה שעל הפרבולה $y^2 = 2px$ נמצאת במרחק 6 מהמוקד ובמרחק $\sqrt{45}$ מהקודקוד.

א. מצא את משוואת הפרבולה (2 אפשרויות).

ב. מצא את שיעורי הנקודה (2 אפשרויות).

ג. סעיף זה מתייחס לפרבולה ששיעורי שתי הנקודות הנ"ל שעליה הם מספרים שלמים. מצא את רדיוס המעגל החסום במשולש שקודקודיו הם שתי הנקודות שעל הפרבולה והקודקוד שלה. (דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

פתרון: א. $y^2 = 4x$ או $y^2 = 12x$. ב. $(3, 6), (3, -6)$ או $(5, \sqrt{20}), (5, -\sqrt{20})$. ג. 1.42

✓ מיתר וקטור בפרבולה

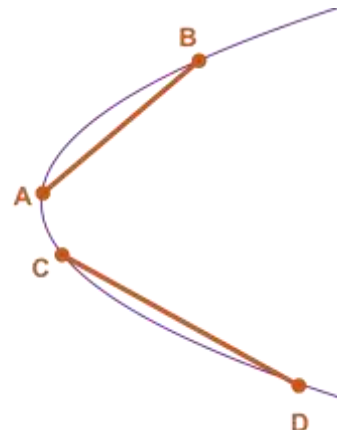
קטע המחבר שתי נקודות שעל הפרבולה נקרא מיתר של הפרבולה

הנקודות A, B, C, D הן נקודות על הפרבולה.

AB ו-CD הם מיתרים של הפרבולה

ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה נקרא קוטר.

במקרה שמשוואת הפרבולה היא $y^2 = 2px$ אז כל קוטר מקביל לציר ה-x.



שיעורי כל אמצעי המיתרים המקבילים זה לזה מקיימים את המשוואה $y = \frac{p}{m}x$ שהיא קו ישר המקביל לציר x

✓ (19)

מצא את משוואתו של מיתר הפרבולה $y^2 = 8x$ שהנקודה $A(5,2)$ היא האמצע שלו.

(הדרכה: סמן את שיעורי הנקודות המיתר AB $B\left(\frac{y_2^2}{8}, y_2\right)$, $A\left(\frac{y_1^2}{8}, y_1\right)$ והיעזר בנוסחה של אמצע קטע)

פתרון: $y = 2x - 8$

✓ (20)

מיתר בפרבולה $y^2 = 2px$ שאמצעו בנקודה $C(3,2)$ עובר דרך מוקד הפרבולה.

מצא את משוואת הפרבולה

פתרון: $y^2 = 8x$ או $y^2 = 4x$

✓ אזורי המישור ביחס לפרבולה

אם $y_1^2 < 2px_1$, אז הנקודה נמצאת בתוך הפרבולה ולהיפך.

אם $y_1^2 = 2px_1$, אז הנקודה נמצאת על הפרבולה ולהיפך.

אם $y_1^2 > 2px_1$, אז הנקודה נמצאת מחוץ הפרבולה ולהיפך.

✓ (21)

נתונה הפרבולה: $y^2 = 4x$ מצא אילו מהנקודות הבאות נמצאות על הפרבולה, בתוך הפרבולה או מחוץ לפרבולה.

(5,4), (4,-8), (9,6), (2,3), (4,-4)

פתרון: מימין לשמאל: בתוך, מחוץ, על, מחוץ, על.

✓ מצב הדדי בין ישר לפרבולה

כדי לקבוע מהו המצב ההדדי נפתור את מערכת המשוואות של הישר והפרבולה.

המצבים הם:

- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות ואז מתקבל במשוואה הריבועית $\Delta > 0$
- הישר חותך את הפרבולה בנקודה אחת, ואז במקרה זה מתקבלת משוואה ממעלה ראשונה והישר הוא מקביל לציר ה-x.

- ג. הישר משיק לפרבולה ואז מתקבל במשוואה הריבועית $\Delta = 0$
- ד. לישר ולפרבולה אין נקודות משותפות ואז מתקבל במשוואה הריבועית $\Delta < 0$

המצבים הם:

- א. הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות ואז מתקבל במשוואה הריבועית שני פתרונות $\Delta > 0$
- ב. הישר חותך את הפרבולה בנקודה אחת, ואז במקרה זה מתקבלת משוואה ממעלה ראשונה והישר הוא מקביל לציר ה-x.
- ג. הישר משיק לפרבולה ואז מתקבל במשוואה הריבועית פתרון יחיד $\Delta = 0$
- ד. לישר ולפרבולה אין נקודות משותפות ואז מתקבל במשוואה הריבועית שאין פתרון $\Delta < 0$

 (22)


נתונים הישר $y=mx+2$ והפרבולה $y^2 = 16x$. מצא לאילו ערכים של m הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.

פתרון: $m \neq 0, m < 2$

 (23)

נתונים הישר $y=mx+2$ והפרבולה $y^2 = 16x$. מצא לאילו ערכים של m הישר משיק לפרבולה.

פתרון: $m = 2$

 (24)

נתונים הישר $y=mx+2$ והפרבולה $y^2 = 16x$. מצא לאילו ערכים של m לישר ולפרבולה אין אף נקודה משותפת.

פתרון: $m > 2$

 (25)

נתונים הישר $y=mx+2$ והפרבולה $y^2 = 16x$. מצא לאילו ערכים של m הישר חותך את הפרבולה בנקודה אחת.

פתרון: $m = 0$

משוואת המשיק לפרבולה

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

משוואת הנורמל לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_1, y_1) שעליה היא:

$$y_1x + py = y_1(p + x_1)$$

 (26)

נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$ מצא את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (8,8)

פתרון: $y = \frac{1}{2}x + 4$

 (27)

לפרבולה $y^2 = 6x$ מעבירים משיק בנקודה $x=24$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. המשיק הנ"ל חותך את ציר ה-y בנקודה B. הוכח כי $AB \perp BF$ (F מוקד הפרבולה).

פתרון: $y = \frac{1}{4}x + 6$

 (28)

לפרבולה $y^2 = 16x$ מעבירים משיק ששיפועו 4. מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק

פתרון: $-4x + y - 1 = 0$

פרבולה עם מעגל

מעגל יכול לחתוך פרבולה, להשיק לפרבולה או לא לחתוך את הפרבולה.

מעגל ופרבולה נקראים משקיים זה לזה אם יש להם נקודה משותפת שדרכה עובר משיק המשותף למעגל והפרבולה.

 (29)

מעגל שמרכזו בנקודה (5,0) משיק לפרבולה $y^2 = 2x$ בשתי נקודות. מצא את רדיוס המעגל ואת שתי נקודות ההשקה.

פתרון: $R = 3, (4, \sqrt{8}), (4, -\sqrt{8})$

 (30)

נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$. מצא משוואה של מעגל המשיק לפרבולה בשתי נקודות, מרכזו

על ציר ה-x ורדיוסו $\sqrt{32}$

פתרון: $(x - 6)^2 + y^2 = 32$

 (31)

נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$. מצא משוואה של מעגל המשיק לפרבולה בשתי נקודות, מרכז

על ציר ה-x ורדיוסו $\sqrt{8}$


פתרון: $(x - 3)^2 + y^2 = 8$

 (32)

נתונה הפרבולה $y^2 = 24x$. מצא משוואה של מעגל המשיק לפרבולה בשתי נקודות, מרכז

על ציר ה-x ורדיוסו 6

פתרון: $(x - 7.5)^2 + y^2 = 36$

 (33)

מעגל שמרכזו בנקודה (4,0) משיק לפרבולה $y^2 = 6x$ בשתי נקודות. מצא את רדיוס המעגל ואת שתי נקודות ההשקה.

פתרון: $R = \sqrt{15}$ נקודות ההשקה:

(34)

מעגל שמרכזו בנקודה (6,0) משיק לפרבולה $y^2 = 8x$ בשתי נקודות. מצא את רדיוס המעגל ואת שתי נקודות ההשקה.

מצא את רדיוס המעגל הנ"ל אם נתון שהוא משיק לפרבולה הנ"ל רק בנקודה אחת. מצא את משוואת המשיק במקרה הזה.

פתרון: $R = 6$ נקודות ההשקה:

 **בגרות קיץ מועד ב 2014 שאלון 807/582**

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 3x$. ישר המשיק לפרבולה בנקודה B מקביל למיתר OA (O-ראשית הצירים). דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x. הישר חותך את המשיק בנקודה C (ראה ציור).

נסמן: x_C - שיעור ה-x של הנקודה C.

x_A - שיעור ה-x של הנקודה A.

היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$, וענה על הסעיפים א, ב ו- ג.

א. הבע באמצעות x_C את x_A

ב. הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.

ג. נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625. מצא את השיעורים של הנקודה C.

פתרון: א. $x_A = \frac{4}{3}x_C$. ב. $\frac{3\sqrt{x_C}}{2x_C} = \frac{1.5}{\sqrt{x_C}}$. ג. $C(2.25, 3)$