


תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **חזקות**, המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל service@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

✓ חזקות

✓ הגדרת החזקה

נסתכל על המכפלה הבאה: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2 מוכפל בעצמו 6 פעמים.

אנו מסמנים את המכפלה הנ"ל בצורה הבאה: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$.

קוראים לזה החזקה השישית של 2 או 2 בחזקת 6.

החישוב של 2^6 זה העלאה בחזקה.

בסיס החזקה (a) זה המספר שכופלים אותו בעצמו כמה פעמים.

מעריך החזקה (n) זה המספר שמראה כמה פעמים הבסיס מופיע ככופל במכפלה.

ולכן בביטוי 2^6 , המספר 2 הוא הבסיס ו-6 הוא המעריך.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}} = a^n$$

✓ תרגילים חישוב חזקות

א. ✓ $2^4 =$

ב. ✓ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

ג. ✓ $(-4)^4 =$

ד. ✓ $(-4)^3 =$

פתרונות לתרגילים חישוב חזקות

א. 16 ב. $\frac{9}{25}$ ג. 256 ד. -64

✓ סדר פעולות חשבון עם חזקות

כלל: פעולת העלאה בחזקה קודמת לפעולת החיבור, החיסור, הכפל והחילוק כאשר אין

סוגריים

✓ דוגמאות:

$$4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$$

$$6 \cdot 3^2 - 16 : 2^3 = 6 \cdot 9 - 16 : 8 = 54 - 2 = 52$$

כלל: הפעולה בתוך סוגריים קודמת לפעולת העלאה בחזקה.

✓ דוגמא:

$$(7 - 4)^3 = 3^3 = 27$$

כלל: הפעולות במעריך החזקה קודמות לפעולת העלאה בחזקה.

✓ דוגמא:

$$5^{4+3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 - 3} = 5^{4+21-20-3} = 5^2 = 25$$

תרגילים סדר פעולות חשבון

א. ✓ $4 \cdot 2^4 =$

ב. ✓ $5 \cdot 3^2 - 48 : 2^4 =$

ג. ✓ $(6 - 4)^4 =$

ד. ✓ $3^{3+5 \cdot 2 - 40 : 4} =$

ה. ✓ $-4^2 =$

ו. ✓ $(-4)^2 =$

ז. ✓ $-(-4)^2 =$

ח. ✓ $(-5)^2 + (-2)^5 =$

ט. ✓ $(-2)^5(-4)^2 =$

י. ✓ $-4^2 - (-2)^3 =$

יא. ✓ $(1 + 4)^2 - 5^2 =$

יב. ✓ $-(6 - 8)^5 : (-2^4 + 5 \cdot 3) =$

יג. ✓ $(3^2 - 5^2) : (-2)^4 =$

יד. ✓ $-(-1)^4 \cdot 2^4 =$

טו. ✓ $3(12 : 3^2) =$

טז. ✓ $-(-2^2 + 5)^3 =$

פתרונות לתרגילים סדר פעולות חשבון

א. 64 ב. 42 ג. 16 ד. 27 ה. -16

ו. 16 ז. -16 ח. -7 ט. -512 י. -8

יא. 0 יב. -32 יג. -1 יד. -16 טו. 4 טז. -1

✓ חוקי חזקות

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_k = a^{n+k} \quad (1)$$

✓ דוגמאות:

$$2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$$

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^7 = a^{4+3+7} = a^{14}$$

$$(n > k, a \neq 0), \frac{a^n}{a^k} = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_k} = a^{n-k} \quad (2)$$

✓ דוגמאות:

$$\frac{2^5}{2^4} = 2^{5-4} = 2^1 = 2$$

$$\frac{a^{14}}{a^6} = a^{14-6} = a^8$$

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}_k = a^{nk} \quad (3)$$

✓ דוגמאות:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

$$\frac{(a^8)^4 \cdot (a^6)^5}{((a^2)^4)^7} = \frac{a^{32} \cdot a^{30}}{(a^8)^7} = \frac{a^{32} \cdot a^{30}}{a^{56}} = \frac{a^{32+30}}{a^{56}} = \frac{a^{62}}{a^{56}} = a^{62-56} = a^6$$

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot \dots \cdot ab}_n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_n = a^n \cdot b^n \quad (4)$$

✓ דוגמאות:

$$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 2^3 \cdot (2^2)^3 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^9$$

$$(2 \cdot 4)^3 = (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 2^3 \cdot 4^3 =$$

$$2^3 \cdot (2^2)^3 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^9$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_n} = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0), \quad (5)$$

✓ דוגמאות:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

תרגילים חוקי חזקות

א. ✓ $a^8 \cdot a^4 =$

ב. ✓ $a^7 \cdot a^{15} \cdot a^6 =$

ג. ✓ $\frac{a^8}{a^4} =$

ד. ✓ $\frac{3^{19}}{3^{16}} =$

ה. ✓ $a^3 \cdot b^4 \cdot a^8 \cdot b^3 =$

ו. ✓ $\frac{a^6 b^5}{a^2 b^3} =$

ז. ✓ $(a^5)^6 =$

ח. ✓ $(a^3)^4 \cdot (a^6)^2 =$

ט. ✓ $\frac{5 \cdot (5^3)^6}{(5^6)^3} =$

י. ✓ $(ab)^6 =$

יא. ✓ $(a^3 b)^4 =$

יב. ✓ $(a^2 b^3)^2 (a^7 b^5)^3 =$

יג. ✓ $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4 =$

יד. ✓ $\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 =$

טו. ✓ $\left(\frac{b^3}{a^4}\right)^5 \left(\frac{1}{b^4}\right)^3 \frac{(a^2)^{10}}{b^3}$

טז. ✓ $\left(\frac{1}{5}\right)^3 =$

פתרונות לתרגילים בחוקי חזקות

א. a^{12} ב. a^{28} ג. a^4 ד. 27 ה. $a^{11} \cdot b^7$ ו. $a^4 \cdot b^2$ ז. a^{30} ח. a^{24}

ט. 5 י. $a^6 b^6$ יא. $a^{12} b^4$ יב. $a^{25} b^{21}$ יג. $\frac{a^8}{b^{12}}$ יד. $\frac{a^7}{b^8}$ טו. 1 טז. $\frac{1}{125}$

חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים

א. ✓ $\frac{10^{74}}{270 \cdot 572} =$

ב. ✓ $\frac{6^{59}}{16^{13} \cdot 9^{29}} =$

ג. ✓ $\frac{49^{20} \cdot 25^{42}}{35^{40} \cdot 125^{14}} =$

ד. ✓ $\frac{360^{30} \cdot 1000^{50}}{48^{60} \cdot 625^{45}} =$

ה. ✓ $\left(\frac{1}{9}\right)^{10} \cdot 27^7 =$

פתרונות: חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים

א. 400 ב. 384 ג. 25 ד. 1 ה. 3

✓ חזקה עם מעריכים שהם אפס ומספרים שליליים שלמים

עד כה עסקנו בחזקות בעלות מעריכים טבעיים (שלמים וחיוביים).

כעת נרחיב את פעולת הגדרת החזקה גם לחזקות עם מעריך אפס ולחזקות עם מעריך שלילי.

נסתכל על סדרת השוויונות הבאה:

$$\begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ 2^3 = 8 \\ 2^2 = 4 \\ 2^1 = 2 \\ 2^0 = 1 \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{array} \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{l} :2 \\ :2 \\ :2 \\ :2 \\ :2 \\ :2 \end{array}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$a^{n-k} = \frac{a^n}{a^k} \quad \text{אנו מכירים את הזהות:}$$

עבור $n > k$

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1 \quad \text{כעת נציב } n=k \text{ ונקבל:}$$

ואם נציב $n=0$

$$a^{0-k} = \frac{a^0}{a^k}$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

מסקנה:

חוקי חזקות נשארים תקפים גם בעבור מעריכים שליליים ואפס.

תרגילים חזקה עם מעריכים שהם אפס ומספרים שליליים שלמים

א. ✓ $-(-3)^0 =$

ב. ✓ $4 \cdot 7^0 =$

ג. ✓ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

ד. ✓ $-1 \left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} =$

ה. ✓ $\frac{(a^6)^3}{(a^4)^5} =$

ו. ✓ $\frac{a^6 a^5}{a^8 a^3} =$

ז. ✓ $\frac{(a^{-5} b^3)^{-4} (a^4)^{-2}}{(a^{-2})^{-6} b^{-3} b^{-9}} =$

ח. ✓ $\left(\frac{a^3}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^{-6}}{b^{-2}}\right)^2 =$

פתרונות לתרגילים חזקה עם מעריכים שהם אפס ומספרים שליליים שלמים

א. -1 ב. 4 ג. 4 ד. $-\frac{256}{81}$ ה. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ו. 1 ז. 1 ח. 1