תלמידים יקרים

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **אינטגרל**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומרי עזר להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

תאריך עדכון: פברואר 2019

חשבון אינטגרלי

הפונקציה הקדומה

עד כה למדנו לחשב את הנגזרת של פונקציה וקראנו לפעולה זו **גזירה**.

כעת נעסוק בפעולה **ההפוכה**, כלומר מציאת הפונקציה המקורית עפ"י הפונקציה הנגזרת שלה.

נעסוק כעת בפעולת **האינטגרציה – חישוב אינטגרל**

אינטגרציה היא פעולה שהפוכה לגזירה עד כדי **תוספת קבוע**.

כלומר, תהיה נתונה הפונקציה **הנגזרת f'(x)** וצריך יהיה למצוא את **הפונקציה המקורית f(x).**

כעת נעסוק בפעולת אינטגרציה בעיקר בהסתמך על ידיעת הנגזרת. אינטגרלים כאלה יקראו **אינטגרליים מידיים**.

הסבר: מהי פונקציה קדומה ?

$$\int \boldsymbol{2x\,dx} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{C}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$$

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = x^2 - 4$$

$$f_3(x) = x^2 + 1$$

$$f_4(x) = x^2 - 1{,}000{,}000$$

נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

שלוש הפונקציות הן מהצורה: $f(x) = x^2 + C$

השוני היחיד הוא באיבר החופשי C

הנגזרת של כל אחת מהפונקציות היא: f'(x)=2x

הגדרה: פונקציה קדומה

פונקציה F(x) נקראת פונקציה קדומה לפונקציה נתונה f(x) אם F'(x)=f(x) לכל x בתחום של f(x).

שימו לב – **פועלת האינטגרציה לא תיתן לנו פונקציה יחידה**.

למשל הפונקציה: $f'(x) = x^2$ היא יכולה להיות כל אחת מהפונקציות f(x) הבאות:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \;,\; f(x) = \frac{x^3}{3} + 8 \;,\; f(x) = \frac{x^3}{3} - 9 \;,\; f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$$

למעשה f(x) היא כל פונקציה מהצורה $f(x) = \frac{x^3}{3} + c$ כאשר c הוא מספר קבוע.

מקור השם פונקציה קדומה הוא בכך שהפונקציה f(x) מתקבלת מ- F(x) על ידי גזירה, ובמובן זה F(x) קודמת ל- f(x).

הגדרה:

פונקציה F(x) נקראת פונקציה קדומה לפונקציה נתונה f(x) אם F'(x)=f(x) לכל x בתחום של f(x).

מקור השם פונקציה קדומה הוא בכך שהפונקציה f(x) מתקבלת מ- F(x) על ידי גזירה, ובמובן זה F(x) קודמת ל- f(x).

תרגילים

נתונה נגזרת של הפונקציה. יש למצוא את משפחת הפונקציות הקדומות שהנגזרת היא:

(1) $f'(x) = 3x^2$

(2) $f'(x) = x^3$

(3) $f'(x) = x^5$

(4) $f'(x) = 1 - 3x^2 - x^5$

(5) $y' = x - 5x^4$

(6) $y' = 2x - 1$

מונחים וצורת רישום

- התהליך באמצעותו מוצאים פונקציות קדומות נקרא **אינטגרציה**.
- אוסף כל הפונקציות הקדומות של f(x) נקרא **אינטגרל בלתי מסוים** של f(x) ומסומן $\int f(x)\,dx$.
- נהוג לסמן פונקציה קדומה לפונקציה f(x) ב- F(x)
- הסימן $\int$ (סימן האינטגרל) הוא אות S מסוגננת, האות הראשונה במילה Sum– סכום.
- הפונקציה f(x) הרשומה באינטגרל $\int f(x)\,dx$ נקראת **אינטגרנד**.
- אם F(x) היא פונקציה קדומה של f(x) , אז הביטוי f(x)dx הוא ה**דיפרנציאל** של F(x).
- dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx
- מהרישום dx בסימן האינטגרל ניתן ללמוד שהמשתנה של הפונקציה הוא x.

חוקי אינטגרציה בסיסיים הנובעים מחוקי הגזירה

מתוך: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

מקבלים: $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

האינטגרל של סכום (או הפרש) שתי פונקציות (שיש להן פונקציה קדומה) שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים של שתי הפונקציות.

מתוך: $\left(af(x)\right)' = af'(x)$

מקבלים: $\int \left(af(x)\right)dx = a\int f(x)\,dx$

האינטגרל של פונקציה (שיש לה פונקציה קדומה) המוכלת במספר קבוע שווה למספר הקבוע כפול האינטגרל של הפונקציה.

מתוך: $\left(F(ax+b)\right)' = aF'(ax+b)$

מקבלים: $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ כאשר : $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

אינטגרל של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

$$\int (mx+b)^n\,dx = \frac{(mx+b)^{n+1}}{m(n+1)} + C$$

כאשר n טבעי , $m \neq 0$

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(7) $\int x\,dx$

(8) $\int x^4\,dx$

(9) $\int x^7\,dx$

(10) $\int 1\,dx$

(11) $\int 9x\,dx$

(12) $\int \frac{x^5}{4}\,dx$

(13) $\int \left(-\frac{4x^3}{3}\right)dx$

(14) $\int (3x+2)\,dx$

(15) $\int (3x-6)\,dx$

(16) $\int (9x^2-7x^3)\,dx$

(17) $\int \frac{2x}{9}\,dx$

(18) $\int \frac{x^2}{6}\,dx$

(19) $\int (3-2x)\,dx$

(20) $\int (3-2x)(x-2)\,dx$

(21)

הנגזרת של הפונקציה y היא y'=4x-3

גרף הפונקציה עובר דרך הנקודה (1,10) .

מצא את הפונקציה y.

(22)

נתונה הפונקציה שנגזרתה: $f'(x) = 3x^2 - 5$

גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה x=2.

מצא את הפונקציה הקדומה f(x).

(23)

נתונה הפונקציה f(x) שנגזרתה: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

א. (1) מצא את שיעורי ה-x של נקודת המינימום של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי ה-x של נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. ערך הפונקציה בנקודות המינימום שלה הוא 5-. מצא את f(x)

(24)

נגזרת הפונקציה f(x) היא: $f'(x) = 2x^3 - 54$

ערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא 20-

א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מצא את הפונקציה f(x)

פתרון: א. 3. ב. $f(x) = \frac{x^4}{2} - 54x + 101.5$

(25)

נתונה נגזרת הפונקציה: $f'(x) = 4x - x^2$

נתון: f(3)=4

מצא את הפונקציה הקדומה.

פתרון: ב. $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 5$

(26)

נתונה נגזרת הפונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 8x$

ערך הפונקציה בנקודה x=1 הוא 5-.

חשב את ערך הפונקציה בנקודה x=0.

פתרון: (0,-2)

(27)

הנגזרת של הפונקציה f(x): $f'(x) = 4x - x^2$

הפונקציה f(x) עוברת דרך הנקודה (3,3) .

מצא את הפונקציה f(x).

פתרון $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 6$

(28)

נתון כי $f'(x) = 16x^3 - 2$,

וערכה של הפונקציה f(x) בנקודת המינימום שלה הוא 2.

א. עבור איזה ערך של x מקבלת הפונקציה f(x) מינימום?

ב. מצא את הפונקציה f(x).

פתרון א. x=0.5 ב. $f(x) = 4x^4 - 2x + 2\frac{3}{4}$

(29)

נתונה פונקציה f(x) המקיימת:

$f'(x) = \frac{2x^2-5}{3}$ **ו-** f(3)=2.

חשב את f(0)

<u>פתרון</u> f(0)=1

(30)

הנגזרת של הפונקציה f(x) מקיימת: $f'(x) = 6x^2 - 8x$

ערך הפונקציה f(x) בנקודה x=1 הוא 5.

חשב את ערך הפונקציה f(x) בנקודה x=2.

<u>פתרון</u> f(2)=7

(31)

הפונקציה f(x) חותכת את ציר ה-y בנקודה y=-1.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = 3x^2 - 1$

מצא את f(2)

<u>פתרון</u> f(2)=5

אינטגרל הלא מסוים פונקציות רציונליות

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^n}}\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{x^{-n}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$\int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x)^n}}\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x)^{-n}dx}$$

$$\int f(x)^{-n}dx = \frac{f(x)^{-n+1}}{f'(x)\cdot(-n+1)} + C$$

תרגיל

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(32) $\int \frac{4}{x^2}dx =$

(33) $\int -\frac{1}{2x^2}dx =$

(34) $\int \left(x^2 + 6x + \frac{6}{x^2}\right)dx =$

(35) $\int \frac{1}{(x+65)^2}dx$

(36) $\int \frac{12}{(5-3x)^2}dx$

(37) $\int \frac{9}{x^5}dx$

(38) $\int \left(-\frac{5}{2x^5} - 3x\right)dx$

(39) $\int \frac{3}{(x-4)^4}dx$

אינטגרל לא מסוים פונקציות שורש

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{mx+b}} dx = \frac{1}{m}\sqrt{mx+b} + C$$

תרגיל

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(40) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(41) $\int -\frac{4}{\sqrt{x}} dx$

(42) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2})\, dx$

(43) $\int \frac{4}{\sqrt{4-x}} dx$

(44) $\int \frac{5}{\sqrt{2-5x}} dx$

אינטגרל בשיטת ההצבה

$$\int \left(f(x)\right)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + C$$

תרגיל

מצא את האינטגרל הבא ע"י זיהוי הנגזרת הפנימית – שיטת ההצבה

(45) $\int (x^3+2)^5 x^2\,dx =$

(46) $\int 3\cdot(x^3+4)^2\cdot x^2\,dx =$

(47) $\int x(x^2+9)^5\,dx =$

(48) $\int (2x+4x^3)(1+x^2+x^4)^2\,dx =$

(49) $\int 5x^2\,(x^3-3)^4\,dx =$

(50) $\int 3x^2\,\sqrt[4]{x^3+1}\,dx =$

(51) $\int x\sqrt[4]{x^2+1}\,dx =$

(52) $\int \frac{4x-5}{(2x^2-5x+1)^3}\,dx =$

(53) $\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx =$

(54) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}\,dx =$

(55) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx =$

(56) $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+5}}\,dx =$

אינטגרל לא מסוים פונקציות טריגונומטריות

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(mx+b)\, dx = \frac{-\cos(mx+b)}{m} + C$$

$$\int \sin f(x)\, dx = \frac{-\cos f(x)}{f'(x)} + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \cos(mx+b)\, dx = \frac{\sin(mx+b)}{m} + C$$

$$\int \cos f(x)\, dx = \frac{\sin f(x)}{f'(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(mx+b)} dx = \frac{\tan(mx+b)}{m} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} dx = \frac{\tan f(x)}{f'(x)} + C$$

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(57) $\int 4\sin x\, dx$

(58) $\int \sin 6x\, dx$

(59) $\int 4x^2 - 5\sin x\, dx$

(60) $\int 2\cos x\, dx$

(61) $\int (\frac{1}{2} - \cos x)\, dx$

(62) $\int \cos 3x\, dx$

(63) $\int \left(x + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx$

(64) $\int (\cos(-2x) + 2\sin(3x))\, dx$

(65) $\int (3\cos x - 4\sin x)\, dx$

(66) $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}} dx$

(67) $\int \sin x \cos^4 x\, dx$

(68) $\int \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} dx$

(69) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(70) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

(71) $\int x^3 \cos x^4\, dx$

חישוב שטח

השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה f(x),

הישרים x=a, x=b וציר ה- x

(כאשר f(x) חיובית בקטע (a,b))

$$S=\int_a^b f(x)\,d(x)=F(b)-F(a)$$

חישוב השטח הכלוא בין גרפים של שתי פונקציות

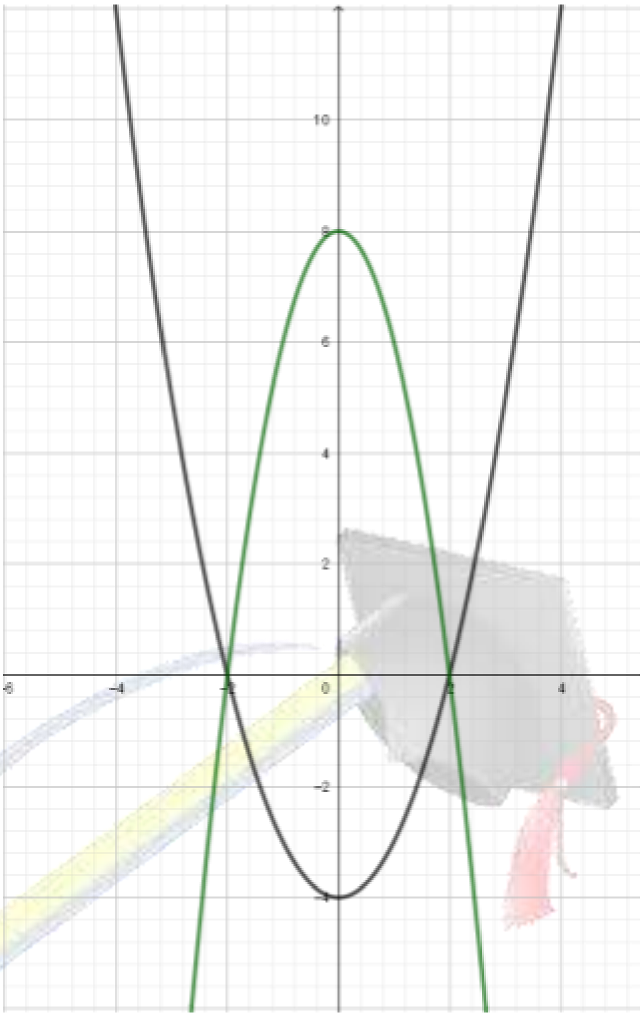
נבין את השטח של גרפים בין פונקציות לפי הדוגמה הבאה:

תרגיל חלק א'

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^2-4$

$g(x)=8-2x^2$

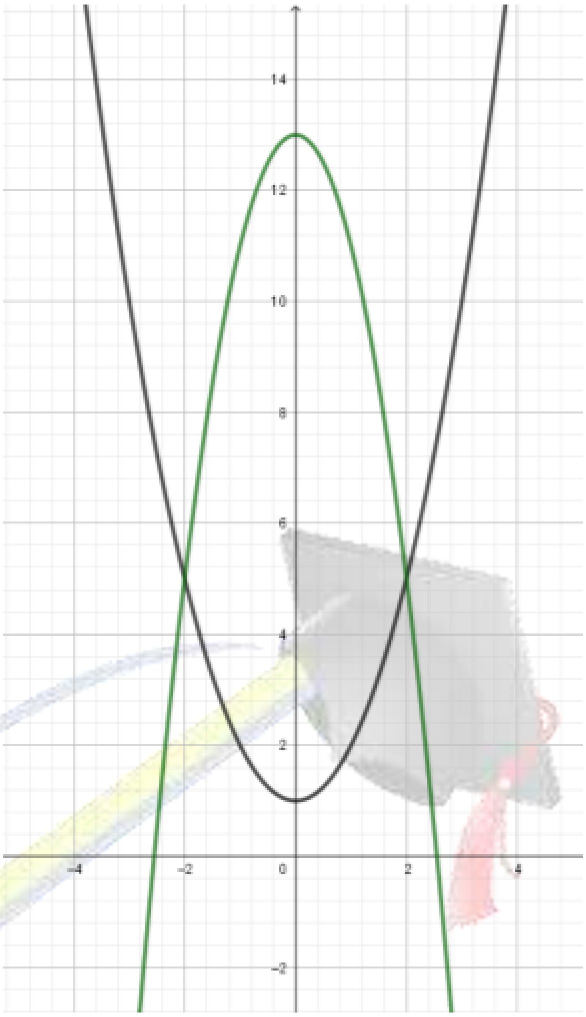


תרגיל חלק ב'

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = 13 - 2x^2$$

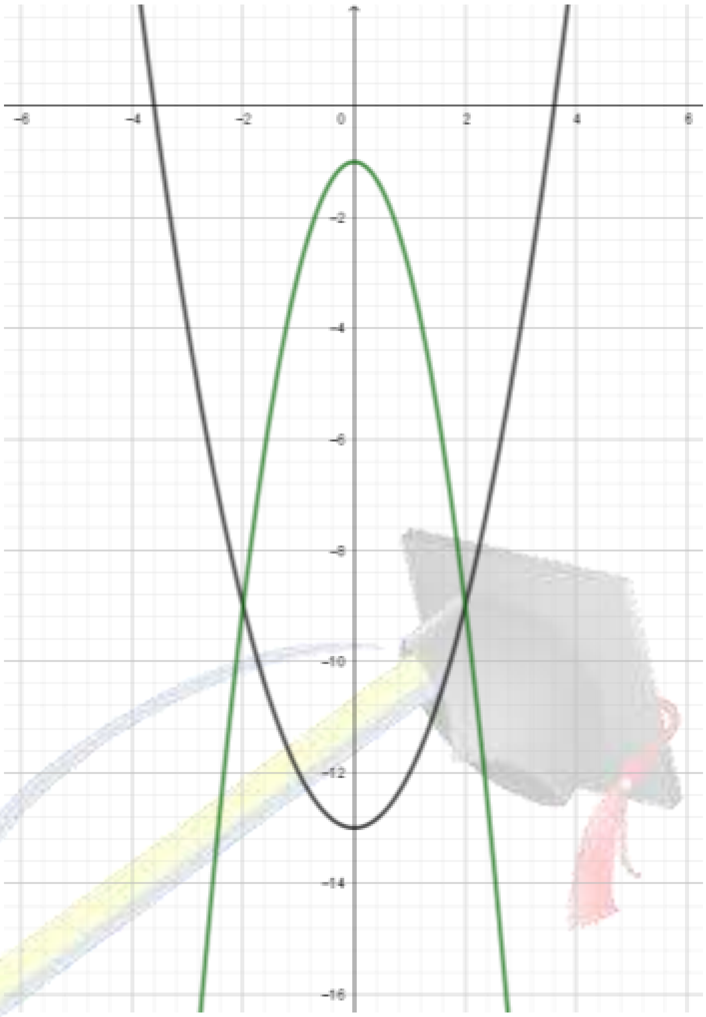


תרגיל חלק ג'

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 13$$

$$g(x) = -1 - 2x^2$$



תרגיל

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 6$$

$$g(x) = 6 - 2x^2$$

תרגיל

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^2 + 6$ שני הצירים והישר x=4

תרגיל

חשב את השטח הנמצא ברביע הרביעי והמוגבל ע"י גרף הפונקציה

$$y = x^2 - x - 6$$

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = x^2 - 4x + 4$ על ידי ציר ה-x, על ידי ציר ה-y ועל ידי הישר x=-1.

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = x^2 - 4x + 4$ עם הצירים

תרגיל

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = (x-2)^2$ לבין הצירים

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = (x-1)^4$ עם הצירים

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = 2x^2 - 3x - 5$ עם הצירים ברביע הרביעי

תרגיל

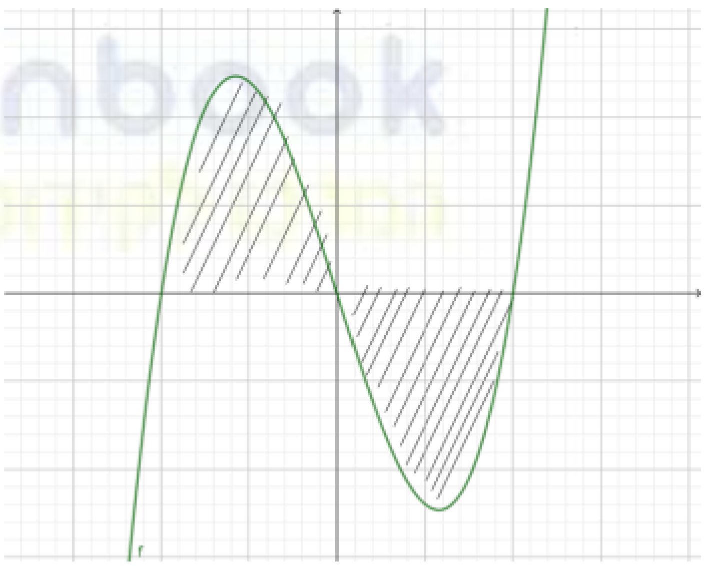
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = (x-2)^3$ לבין הצירים

תרגיל

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y = x(x^2 - 16)$ וציר ה- x

תרגיל

נתונה הפונקציה $y = x(x^2 - 9)$ חשב את השטח המסומן בשרטוט



תרגיל

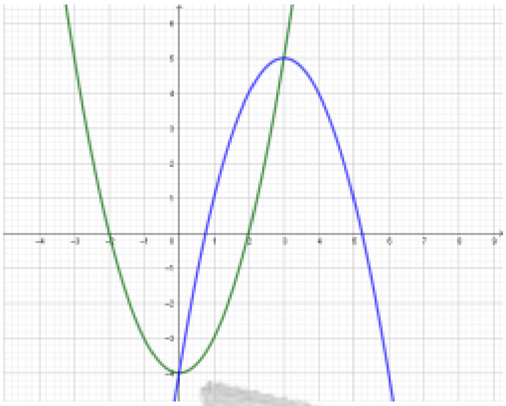
חשב את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y = x(x^2 - 15)$ והישר y=x

תרגיל

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$y = x^2 - 4$$

$$y = -x^2 + 6x - 4$$

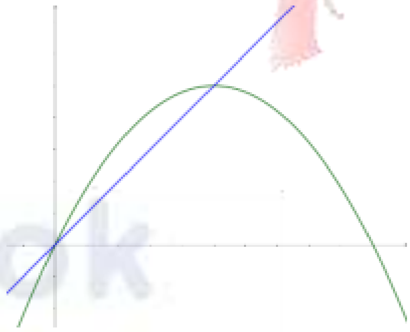


תרגיל

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$y = 2x - x^2$$

$$y = x$$

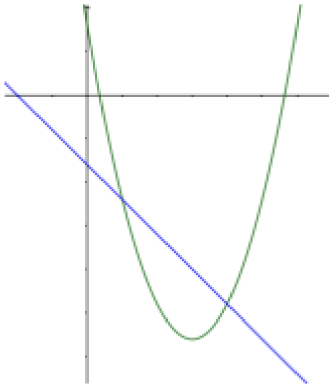


תרגיל

חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$y = x^2 - 12x + 8$$

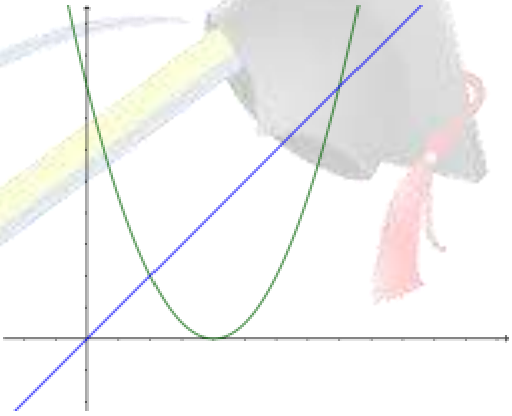
$$y = -2x - 8$$



תרגיל

בציור מתואר הגרפים של הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 4$ ו- $y = x$

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-x.

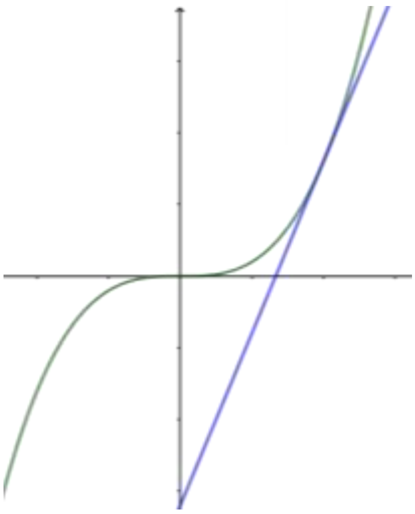


תרגיל

לגרף הפונקציה $y = x^3$ העבירו משיק בנקודה (2,8)

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה המשיק וציר ה-y.



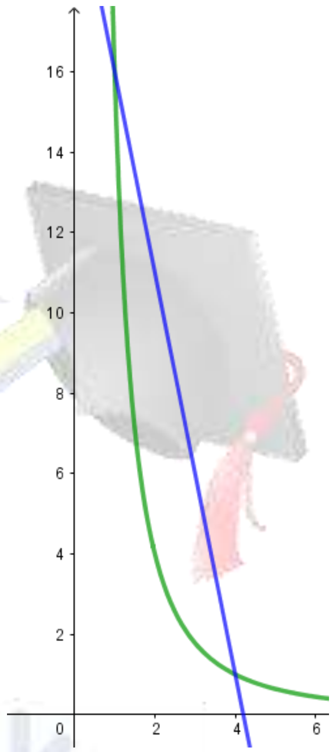
תרגיל

הגרפים של הפונקציות: $y=\frac{16}{x^2}$ ו- $y=-5x+21$ נחתכים בנקודות A ו- B (ברביע הראשון).

שיעור ה- y של הנקודה A הוא 16 ושיעור הy של נקודה B הוא 1.

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות ברביע הראשון.



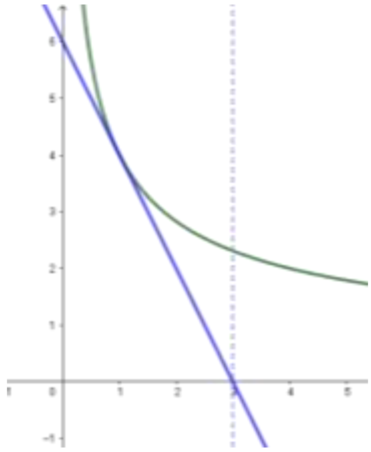
תרגיל

לגרף הפונקציה: $y=\frac{4}{\sqrt{x}}$ העבירו משיק בנקודה בה y=4.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר המאונך לציר ה-x שעובר בנקודה שמצאת בסעיף ב.

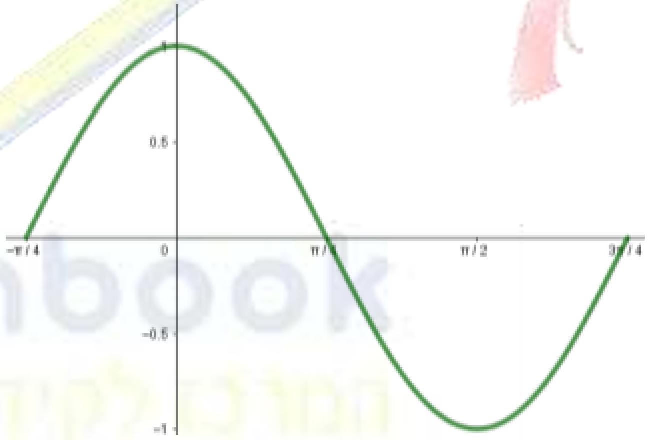


תרגיל

בציור מתואר גרף הפונקציה y= cos 2x בתחום $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi$.

א. חשב את האינטגרל: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos 2x \ dx$

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר ה-x בתחום.



תרגיל

חילוק פולינומים:

(1)$\frac{6x^3-2x^2-8}{3x-1}$

(2)$\frac{12x^3-27x^2-30x+9}{x+1}$

(3)$\frac{x^3}{x+1}$

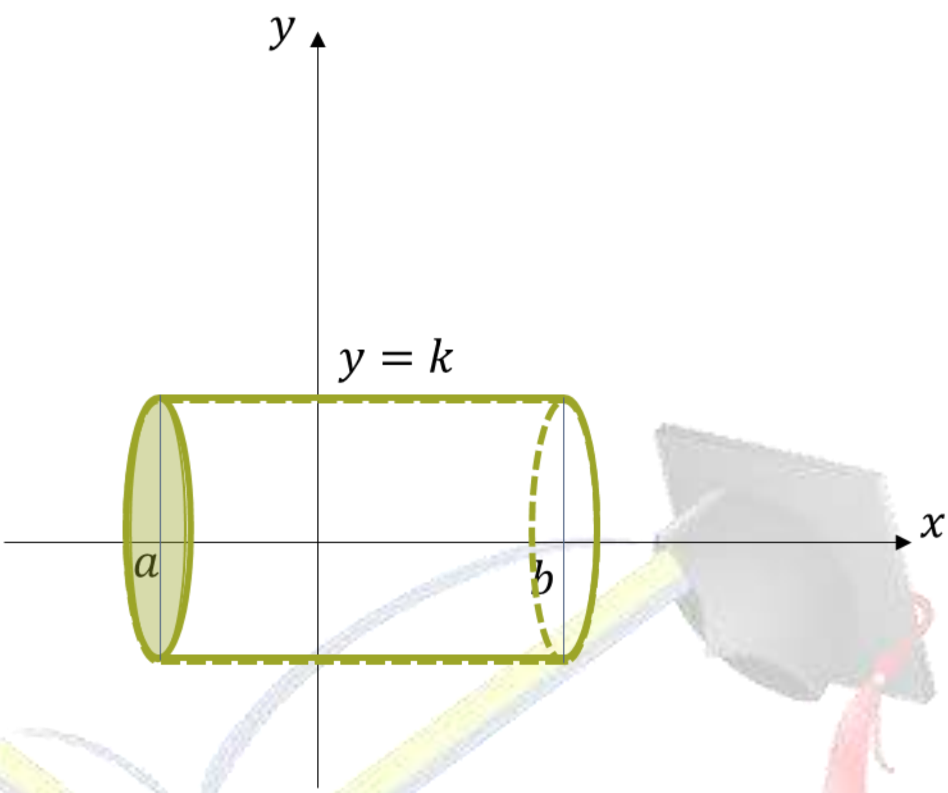
תרגיל

בציור מתואר גרף הפונקציה: $y=\frac{x^4-5x^3+3x^2+11x+2}{x+1}$.

דרך נקודות הקיצון של הפונקציה מורידים אנכים לציר ה-x .

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, האנכים הנ"ל וציר ה-x.

נפח גוף סיבוב



$$V = \pi \cdot k^2 \cdot (b-a)$$

$$\int_a^b k^2\,dx = [k^2x]\Big|_a^b = k^2b - k^2a$$

$$V = \pi \cdot k^2 \cdot (b-a) = \pi\int_a^b k^2\,dx$$

נפח גוף סיבוב הנוצר מסיבוב ציר ה-x של השטח הכלוא בין שתי פונקציות:

העליונה f(x) והתחתונה g(x)

בקטע [a,b] ונמצא כולו מצד אחד של ציר ה- x :

$$V = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

תרגיל

חשב מהו נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב ציר ה-x

של השטח הכלוא בין גרף הפונקציה:

$f(x)=\sqrt{3-x}$ והצירים?

תרגיל

חשב מהו נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x

של השטח הכלוא בין שתי פונקציות:

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}$$

חישוב: נפח גוף סיבוב הנוצר מסיבוב של פונקציה המחליפה את סימנה סביב ציר ה-x

תרגיל

א. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה:

$f(x)=x^3-16x$ וציר ה- x.

ב. $g'(x)=f(x)$ מצא את שיעורי ה-x של נקודת הקיצון של g(x) וקבע את סוגן.

ב. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של g(x).

חישוב שטח: נפח גוף סיבוב הנוצר מסיבוב של פונקציה המחליפה את סימנה סביב ציר ה-x

תרגיל

א. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה-x של השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה:

$f(x)=\sin x$ וציר ה- x בתחום:

(1) $0\le x\le\pi$ (2) $-\pi\le x\le 0$ (3) $-\pi\le x\le\pi$

ב. מה הקשר בין סכום הנפחים שחושבו בסעיף הקודם לבין ערך האינטגרל: $\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 x)dx$?

חישוב שטח: נפח גוף סיבוב הנוצר מסיבוב של שטח הכלוא בין שתי פונקציות שמצבן ההדדי משתנה

תרגיל

מהו נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב השטח הכלוא בין הגרף של $f(x)=2+\sin x$

לבין הגרף של $g(x)=2-\sin x$, סביב ציר ה-x בתחומים הבאים:

(1) $-\pi \le x \le 0$ (2) $0 \le x \le \pi$ (3) $-\pi \le x \le 3\pi$

ב. מהו ערך האינטגרל: $\pi \int_{-\pi}^{3\pi} \left((2+\sin x)^2 - (2-\sin x)^2 \right) dx$?

כיצד הוא קשור לפונקציות f ו- g ?